

運用自參數調變於非線性吸振器之研究

The development of an active nonlinear vibration absorber using quadratic coupling

黎文龍* 蘇育賢

台北科技大學 機電整合研究所

*E-mail: wlli@ntut.edu.tw

摘要

在本研究以設計一半主動減振系統為目標，希望利用可調整之空氣彈簧來控制系統參數，以達到運用非線性系統中之自參數調變現象來達成減振效果。系統經過比較各種設計優缺點後，以單擺機構與空氣彈簧之連結當作系統之減振元件，透過不斷改良的幾何關係設計，能使系統運動方程式中出現 $x\theta$ 的相乘項以及線性自然頻率，前者能使系統在受到2:2:1(激振頻率:主系統頻率:子系統頻率)頻率激振時，兩自由度之間能夠產生能量交換;後者則是方便往後調整空氣彈簧彈性係數以及套用於多尺度分析計算。最後以多尺度分析作為調整參數之依據，在實體建立之前能夠設定一合理且較佳之參數。

關鍵詞：自參數調變、多尺度分析、單擺、空氣彈簧

1. 前言

在微細製程所需之限制下，振動對於精密機台之影響越受到重視，尤其以晶圓之微影製程與微細加工製程影響甚鉅。而在機台隔振方法上主要分為:被動式、半主動式、與主動式。被動式為在系統中加入彈簧元件，改變系統之自然頻率，避免和外力干擾頻率產生共振之情形；或是在系統中加入阻尼元件，利用其能量消耗的特性降低系統的振幅，以上兩種方法優點為可靠性高，但其不能隨著環境的異動而改變參數，如彈簧勁度或阻尼係數，只能用於特定且固定的情況下，缺乏機動性。而半主動式則在系統中加入控制系統與參數可調整之元件，如磁流變液或是記憶合金，利用其參數可調整的性質，可使系統在不同的情形下達到較佳的減振效果。主動式隔振則利用控制系統以及制動器，產生一相位相反，大小相等之外力，藉以抵銷外部之干擾。在效果上以主動式為佳，但應用在大型機台的減振上，需要給其大量的控制能量，在成本上會過於昂貴，故在本研究中以半主動減振做為研究目標，系統模型則以自參數調變(autoparametric)之減振元件做為發展基礎。

在非線性系統中，存在一自參數調變的現象，即利用主系統共振後達到飽和(saturation)時，且與子系統之間的自然頻率達到一整數倍之關係後，主系統之能量將會轉移至子系統，使得主系統振幅變小。Nayfeh[1]是第一個在船隻的 roll 和 pitch 姿態中發現飽和現象，此現象即為當物體共振達一定振幅時，其大小就不會再改變。Oueini 及 Nayfeh[2]利用多尺度分析法(multiple

scale)來分析多種不同之非線性模型，此方法主要化簡系統方程式，求得其近似解。Jo 及 Yabuno[3]、[4]利用磁力以及單擺機構組成一非線性系統，並以多尺度分析以及實驗找出其較佳參數。Duquette[5]於實驗中使用一直流馬達，並連結一次要梁，在其上附加一質量，以用來控制懸臂梁之暫態振動。要使系統中兩自由度產生一非線性的關係，可在之間加入一非線性彈簧(如碟型、空氣彈簧)，或幾何非線性關係(如單擺系統)，但碟型彈簧屬於高負載彈簧，需要運用很大的外力才能改變其彈簧勁度，一方面也會加長致動器作動時間，故無法在控制系統中實現。而空氣彈簧的運用可以在 Plooy 及 Heyns[6]、Jun 及 Hongxing[7]的文章中得知，雖然空氣的壓縮性是屬於一非線性的性質，但是當空氣容積 \gg 壓縮容積時，則可視此彈簧為線性彈簧，無法直接運用，故以幾何非線性(單擺)當做設計目標。

而吸振器的效能評估其中一項就是吸振頻寬，在 Vyas 與 Bajaj[8]的研究中，使用多個不同自然頻率的單擺陣列當作吸振元件，能有效的擴大其吸振頻寬，但如果在振動頻寬大的情形下，則需要安裝數量眾多的單擺，在現實中不易實現，在本文中利用可控制之空氣彈簧調整主系統與單擺之自然頻率，能有效的減少單擺數量，也能降低頻率比例的誤差。

本研究試圖研發出新的非線性系統設計，並藉由可調式線性空氣彈簧來調整主系統與子系統之自然頻率達到一整數倍之關係，使得此系統能有減振之效果，並加入控制元件與回饋感應器，使系統能在任何外力干擾下皆能調整其系統參數，達到一最佳減振效能。

2. 系統設計

要使系統產生自參數調變現象，先決條件為運動方程式當中要有自由度相乘項，以簡單的單擺系統為例，式子中如有 $x\theta$ 的項次，則當 θ (單擺角度)增大時， x (主系統振幅)就會減弱，進而達到系統減振之效果。

在 Lagrange 方程式中可以得知:

$$L = T - V \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_i} = Q \quad (2)$$

其中 T 、 V 為系統動能和位能， g_i 為廣義座標， Q 為系統外力，若需在運動方程式中得到 $x\theta$ 項次，則必須在系統位能中使彈簧包含兩自由度的位能，如



$k(x + \theta)^2 / 2$ 等，才能在後來的微分中得到相乘項。以上述條件為設計依據，有以下設計項目：

2.1 氣壓+幾何非線性系統

如圖一所示， m_1 為主系統質量塊， m_2 為單擺元件， m_3 為單擺末端質量塊，P1、P2 各別為為主系統與子系統之可調整式空氣彈簧，其目的為可利用氣壓閘調節彈簧勁度。將 m_2 結合在 m_1 上，使其可以自由擺動，P2 空氣彈簧則以連桿結合於 m_2 之上。根據無阻尼自然頻率公式：

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

m 為固定之重量，而調整彈簧勁度 k 可直接改變其自然頻率，使主系統與子系統之頻率達到一整數倍，進而引發自參數調變之減振效果。

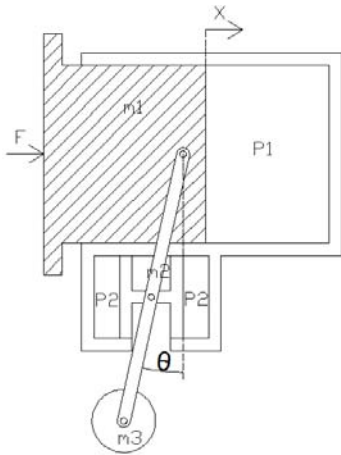


圖 1 氣壓+幾何非線性系統示意圖

由上圖可推導出系統之動能與位能：

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} J m_i \dot{\theta}_i^2 \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + L \sin \theta)^2 \quad (5)$$

其中 r_i 為質量之位置向量， m_i 為各原件之質量， θ_i 為單擺旋轉角度， k_1 、 k_2 各別代表為 P1、P2 之彈簧勁度，而 $x + L \sin \theta$ 則如前面所設定之目標，利用其單擺及彈簧之幾何關係，讓 k_2 彈簧中包含兩自由度之位移，使後續之運動方程式能有相乘項 $x\theta$ 。

但運算後的運動方程式如下，並假設 θ 擺動很小：

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = -k_2\theta + \quad (6)$$

$$L(m_2 + m_3)\theta \cdot \dot{\theta}^2 / 2 + L(m_2 + 2m_3)\ddot{\theta}$$

$$(7L^2 m_2 / 12 + 2L^2 m_3 + \frac{1}{2} m_3 r^2)\ddot{\theta} + k_2 L^2 \theta = -k_2 Lx - \quad (7)$$

$$L(m_2 + 2m_3\ddot{x}) / 2$$

可發現其中並無相乘項 $x\theta$ 的存在，因為假設條件的關係導致 $\cos \theta \approx 1$ ，故兩自由度間並不會產生能量交換的情形。檢討以上結果，得知於 k_2 彈簧位能中，單擺擺動造成彈簧位移要為單擺的垂直方向 ($L \cos \theta$)，經過偏微後才能產生相乘項，故重新設計模型如圖 2：

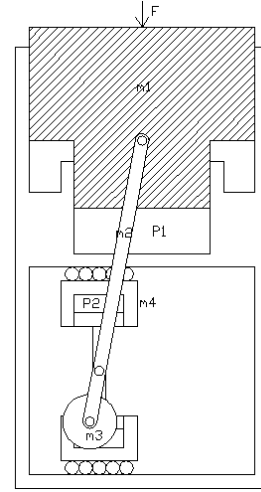


圖 2、氣壓+幾何非線性系統示意圖

系統中將 P2 空氣彈簧設計為可隨著單擺一起移動，避免因幾何限制而使單擺無法擺動。其模型之位能方程式修改如下：

$$V = \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 (L_1 - L_1 \cos \theta)^2 \quad (8)$$

而其運動方程式如下：

$$2(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = -L_2(m_2 + 2m_3)(\dot{\theta}^2 / 2 - \theta\ddot{\theta}) \quad (9)$$

$$(L_2^2(7m_2 + 24m_3) + 12L_1^2 m_4 + 6m_3 r^2)\ddot{\theta} + 12\beta\dot{\theta} = -12(k_2 L_1 y - L_1^2 m_4 \dot{\theta} + L_2(m_2 + 2m_3)\ddot{y}) \quad (10)$$

由上式可得到一相乘項，將推導出之動態方程式，以 mathematica 軟體進行數值模擬，給於其設定參數(重量、阻尼、勁度...)，且設定外力激振頻率與主、子系統之自然頻率比值為 2:2:1 得到其數值解並以圖 4、圖 5 表示：

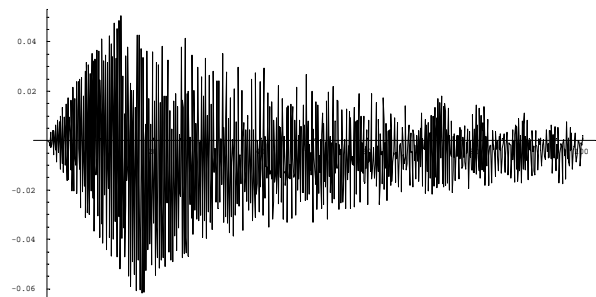


圖 4、主系統振幅(mm)與時間(sec)圖

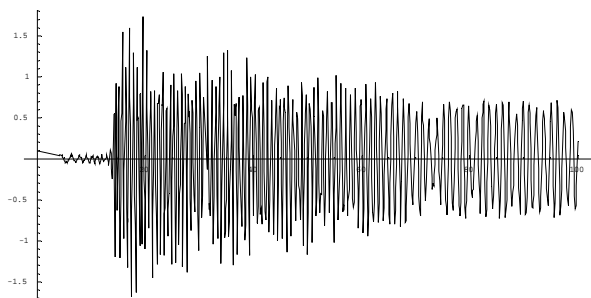


圖 5、子系統振幅(rad)與時間(sec)圖

由以上兩圖可得知，當系統參數呈現整數比值關係，且達到飽和(saturation)狀態時，便會將主系統能量傳遞至單擺上，使得單擺 θ 上升，主系統 y 下降，進而達到系統減振之效果，也可驗證此系統之可行性。但於(10)式中並無線性自然頻率，以致於在後續無法以多尺度分析法作計算，也不能得到其最佳化參數，單擺之自然頻率時無法由方程式直接得知，在調整主、子系統頻率比例時相當不方便，故仍需修改系統模型。

最後修改之模型如圖六所示，其中單擺與空氣彈簧是以溝槽作為結合，使得彈簧位能能夠包含主系統位移以及單擺之擺動角度。其位能方程式如下：

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{L}{2} + x\right)\tan\theta)^2 \quad (11)$$

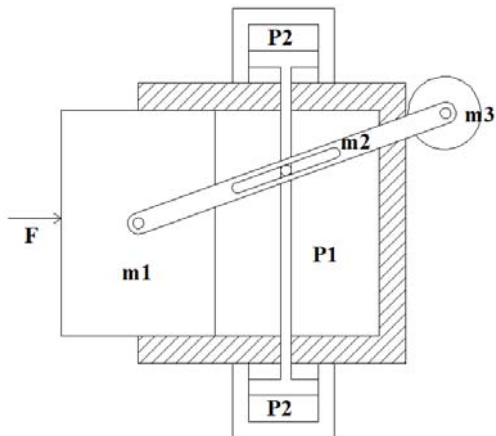


圖 6 氣壓+幾何非線性系統示意圖

將上述之動能位能以 Lagrange 法計算可得下列之運動方程式：

$$\begin{aligned} &2(k_1 + k_2 \tan^2 \theta)x + 2(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + \\ &L(m_2 + 2m_3)\sin\theta \cdot \ddot{\theta} + L(m_2 + 2m_3)\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \\ &k_2 \tan^2 \theta = F \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &(L^2(7m_2 + 24m_3) + 6m_3r^2)\ddot{\theta} - 6L(m_2 + 2m_3)\sin\theta \cdot \ddot{x} + \\ &3k_2 \sec^2 \theta \tan \theta (L + 2x)^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

將(13)式展開後，並假設 θ 角度擺動不大，可得到一 $x\theta$ 之項次以及一線性自然頻率。以 mathematica 軟體進行數值模擬，並設定外力激振頻率(Ω)與主、子系統之自然頻率(ω_1 、 ω_2)比值为 2:2:1 得到其數值解並以下圖表示：

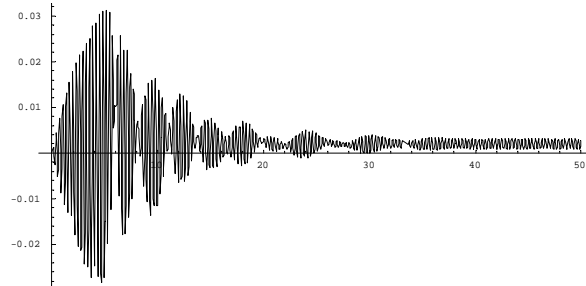


圖 7、主系統振幅(mm)與時間(sec)圖

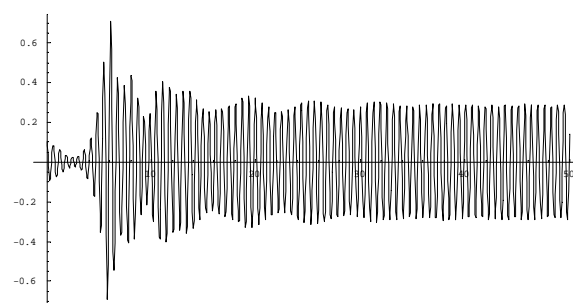


圖 8、子系統振幅(rad)與時間(sec)圖

由以上兩圖可得知系統在 2:2:1 之頻率比例下，因為主系統能量轉移至單擺，產生減振之效果，且有了單擺之線性自然頻率，便能夠利用空氣壓力大小來調整頻率比例，也便於之後多尺度分析。但在干擾頻率偏移的狀態下，無法使主系統以及單擺產生共振，連帶降低減振效果，以下以 $\Omega + 1Hz$ 作為頻率偏差，但主、子系統自然頻率不變之數值解：

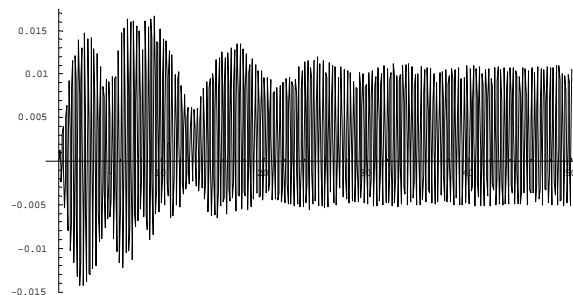


圖 9、主系統振幅(mm)與時間(sec)圖

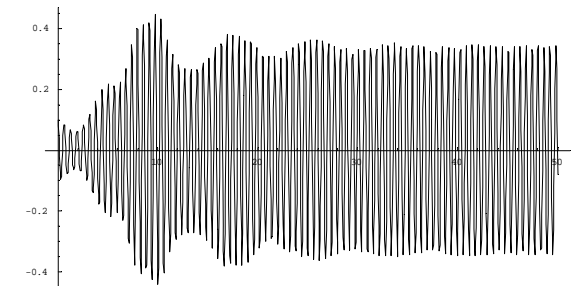


圖 10、子系統振幅(rad)與時間(sec)圖

由上圖可知，雖然頻率偏移可以因為避開系統共振點而使振幅降低，但在進入穩態區時減振效能較低於無頻率偏移的情況。下圖以固定單擺、使其不能擺動的情形，可以得知有無開啟減振功能時之效能差異。

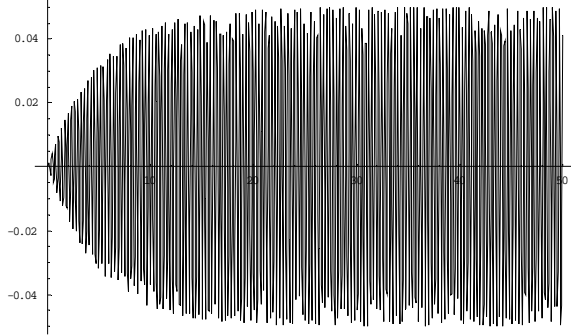


圖 11、主系統振幅(mm)與時間(sec)圖

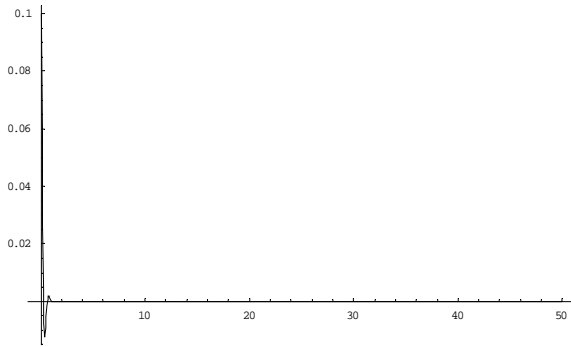


圖 10、子系統振幅(rad)與時間(sec)圖

3. 多尺度分析

多尺度分析(multiple scale)主要為將複雜的非線性系統化簡，並求其出其近似解。先將方程式(12)、(13)中之非線性項、外力項以及阻尼假設很小，即乘上一 ε ，其中 ε 為小於1的實數，並將方程式中係數較小的項次省略，降低後續計算之複雜度。

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{H}x = \varepsilon \left(\frac{F \cos(\Omega t)}{2H} + \frac{k_2 L}{2H} - \frac{k_2}{H} \theta^2 x - \alpha \dot{x} \right) \quad (14)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3k_2 L^2}{E} \theta = \varepsilon \left(\frac{12k_2 L}{E} \theta \cdot x - \frac{12k_2}{E} \theta \cdot x^2 - \frac{12\beta}{E} \dot{\theta} \right) \quad (15)$$

$$H = m_1 + m_2 + m_3, \quad E = L^2(7m_2 + 24m_3) + 6m_3 r^2 \quad (16)$$

並假設 x 與 θ 都為兩種尺度所組成之函數：

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) \quad (17)$$

$$\theta = \theta_0(T_0, T_1) + \varepsilon \theta_1(T_0, T_1) \quad (18)$$

將上式代入(8)和(9)，其中 ε^0 項次為：

$$D_0^2 x_0 + \frac{k_1 x_0}{H} = 0 \quad (19)$$

$$D_0^2 \theta_0 + \frac{3k_2 L^2 \theta_0}{E} = 0 \quad (20)$$

ε^1 項次為：

$$D_0^2 x_1 + \frac{k_1 x_1}{H} = -D_0 x_0 \alpha + \frac{k_2 L \theta_0^2}{2H} - \frac{k_2 x_0 \theta_0^2}{H} + \frac{e^{i T_1 \sigma_1 + i T_0 \omega}}{2H} - 2D_0 D x_0 \quad (21)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \frac{3k_2 L^2 \theta_1}{E} = -2D_0 D_1 \theta + \frac{12k_2 L x_0 \theta_0}{E} - \frac{12k_2 x_0^2 \theta_0}{E} - \frac{12D_0 \beta \theta_0}{E} \quad (22)$$

其中(19)、(20)的解為：

$$x_0 = A(T_1) e^{i \omega_1 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i \omega_1 T_0} \quad (23)$$

$$\theta_0 = B(T_1) e^{i \omega_2 T_0} + \bar{B}(T_1) e^{-i \omega_2 T_0} \quad (24)$$

A 和 B 為待定之複數。將此解代入(21)、(22)式，並且假設：

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i \varphi(T_1)} \quad (25)$$

$$B = \frac{1}{2} b(T_1) e^{i \varphi(T_1)} \quad (26)$$

即可得到(14)、(15)之邊界條件：

$$a' = \frac{-\alpha \cdot a}{2} - \frac{k_2 L b^2 \sin(\psi_1)}{8H\omega_1} \quad (27)$$

$$b' = \frac{3b(-2\beta\omega_2 + k_2 L a \sin(\psi_2))}{E\omega_2} \quad (28)$$

$$\rho' = \frac{-4F + k_2 b^2 (2a - L \cos(\psi_1))}{8H\omega_1 a} \quad (29)$$

$$\varphi' = \frac{3k_2 a (a - L \cos(\psi_2))}{E\omega_2} \quad (30)$$

為求得穩態解，令 $a' = b' = \psi_1' = \psi_2' = 0$ ，可聯立(27)~(30)解得：

$$a = \frac{2\beta\omega_2 \csc(\psi_2)}{k_2 L} \quad (31)$$

$$b = \frac{-\sqrt{8H\omega_1 \alpha \beta \omega_2 \csc(\psi_1) \csc(\psi_2)}}{k_2 L} \quad (32)$$

$$\psi_1 = \frac{8H\omega_1 L Q \alpha \beta \sigma_2 \omega_2 (-U \alpha + 4Q \alpha \beta \sigma_2 \omega_2)}{U(4FU - 8H\omega_1 Q \beta \sigma_2^2 \omega_1)} \quad (33)$$

$$\psi_2 = \frac{-3k_2 L^2 \beta \omega_2 + \sqrt{9k_2^2 L^4 \beta^2 \omega_2^2 + 12k_2 L^2 Q \beta^2 \sigma_2 \omega_2^2}}{k_2 L^2 Q \sigma_2} \quad (34)$$

$$U = -3k_2 L^2 \beta \omega_2 + \sqrt{9k_2^2 L^4 \beta^2 \omega_2^2 + 4k_2 L^2 Q \beta^2 \sigma_2 \omega_2^2}, \quad Q = E\omega_2 \quad (35)$$

將上式代回(17)、(18)以及(23)、(24)，可得 x 與 θ 之近似解：

$$x = x_0 + O(\varepsilon) = a \cos(\rho + t(\varepsilon\sigma_1 + \omega_1)) \quad (29)$$

$$\theta = \theta_0 + O(\varepsilon) = b \cos(\varphi + t\omega_2) \quad (30)$$

$$\rho = \frac{-\psi_1 - 2\psi_2 + t\varepsilon\sigma_2}{2} \quad (31)$$

$$\varphi = \frac{-\psi_1 - T_1\sigma_2}{2} \quad (32)$$

4. 結論

在本篇中，以設計一個具有自參數調變之半主動系統為目的，各種減振元件在經過判斷優缺點後，考慮其實現性以及各種限制，決定利用單擺與空氣彈簧組成減振系統。以簡化後之數學模型進行運動方程式推導，可驗證系統是否存在著相乘項以及線性自然頻率，這兩者為此系統是否具有減振效果之重要依據。

於前面之數值模擬結果可得知，單擺與空氣彈簧系統啟動時，能夠有效的抑制主系統在共振情況下之振動，在穩態區間約能有效降低 93% 的振幅，系統於暫態轉為穩態約花費 5 秒的時間。而在頻率偏移的狀況下，以小幅度的偏移(1Hz)，減振效果便會跌至 67%，可見於頻率準確度對於本系統之重要性，故在未來要加入的控制以及感測系統皆須要求其精密度。前半段之動態模擬皆使用 mathematica 來作數值運算，但如果可改變系統效能之參數較多，仍需解出其解析解，以方便調整其參數。本篇以多尺度分析作為求得近似解的方法，藉由此方法可以得到較為接近的近似解，對於往後的參數最佳化有一定程度的幫助。

5. 致謝

6. 參考文獻

研討會論文：

- [1] A. Nayfeh, D. Mook, L. Marshall, Non-linear coupling of pitch and roll modes in ship motion, *Journal of Hydronautics* 7 (1973), pp.145–152.
- [2] Oueini, S. S., Nayfeh, A. H. & Pratt, J. R. 1999 A review of development and implementation of an active nonlinear vibration absorber. *Ingen. Arch.* 69, pp.585–620.
- [3] H. Jo and H. Yabuno, Amplitude reduction of primary resonance of nonlinear oscillator by a dynamic vibration absorber using nonlinear coupling, *Nonlinear Dynamics* 55 (2009), pp. 67–78.
- [4] H. Jo and H. Yabuno, Amplitude reduction of parametric resonance by dynamic vibration absorber based on quadratic nonlinear coupling, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), pp. 2205–2217.
- [5] A.P. Duquette, K.L. Tuer, M.F. Golnaraghi, Vibration control of a flexible beam using a rotational internal resonance controller Part II: experiment, *Journal of*

Sound and Vibration 167 (1993), pp.63–75.

- [6] N.F. du Ploov, P.S. Hevns, M.J. Brennan, The development of a tunable vibration absorbing isolator, *Int J Mech Sci* 47 (2005), pp. 983–997
- [7] Li, J., Hua, H.X., Shen, R.Y.: Saturation-based active absorber for a non-linear plant to a principal external excitation. *Mech. Syst. Signal Process.* 21(2007), pp. 1489–1498
- [8] A. Vyas and A.K. Bajaj, Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums, *Journal of Sound and Vibration* 246 (1) (2001), pp. 115–135.



The development of an active nonlinear vibration absorber using quadratic coupling

Wenlung Li, Yu-XIAN Su
National Taipei University of Technology
Institute of Mechatronic Engineering

ABSTRACT

In this study, semi-active Vibrations Control system is the goal of design, using adjustable air spring to control the system parameters and use autoparametric phenomenon to reduce vibration. After comparing the advantages and disadvantages of various design, using the pendulum link with the air spring system as the absorber part, through the continuous improvement of the geometry of the design, can make quadratically-coupled appear in the equations of motion and find the linear natural frequency. Because the influence of quadratically coupled, when system is under the frequency ratio 2:2:1 (excitation frequency: the main system's natural frequency: subsystem's nature frequency), the two degree of freedom can exchange energy between each other; If the equation of motion has linear natural frequency which is easy to adjust the air spring stiffness and can calculated by multiple scale analysis. Finally, multiple scale analysis can adjust the parameters of the system before manufacture the prototype.

Keywords: autoparametric, multiple scale analysis, pendulum, air spring.