

# 一種新的系統辨識方法應用於在基座激振下之二自由度結構體

## A new system identification method for two-degree-of-freedom base-excited systems

黎文龍\* 蘇敬鈞

台北科技大學 機電整合研究所

\*E-mail: [wlli@ntut.edu.tw](mailto:wlli@ntut.edu.tw)

### 摘要

本研究係一種系統阻尼比之量測方法，特別適用於基座激振之系統。本研究係以輸入訊號及輸出訊號處理的方式達成，以一弦波激振力(輸入訊號)施加於系統之基座，再量測該系統之穩態響應(輸出訊號)。量測所得之系統響應訊號，再與基座之輸入激振波做乘積調變。接著求取該調變後訊號之傅立葉係數，而所需要量測之系統阻尼耗能、系統之阻尼比及系統之阻尼、勁度及質量矩陣，則可由該傅立葉係數及以本研究所提供之公式計算出。與一般傳統之方式不同的是，本研究之訊號取乃是根據穩態訊號之相位差，故不但可以連續執行，同時也不侷限於小阻尼之系統。

**關鍵詞：** 阻尼耗能、阻尼比、阻尼辨識。

### 1. 前言

現今耐震之技術，除了要保障人員生命安全之外，也必須兼顧結構物於震後之修護、營運及結構物成本之考量。因此，針對於核能廠、水庫及發電廠等重大工程設施上必須進行抗地震性能、結構動態檢測及強震安全監測也就格外的十分重要了。研究結構的動態變形及內力是個十分複雜的問題，它不僅與動力附載之性質、數量及結構本身的動力特性有關，還與結構之組成型式、材料性質以及細部構造等密切相關。

在2007年7月16日早上，日本本州島西岸發生規模6.8級的強震，造成9人喪生，900多人輕重傷，甚至發生輻射物質及冷卻水外洩[1]。由於上述原因，國內學者紛紛對於地震會對結構體造成影響進行相關方面研究。中華民國結構工程學會季刊『結構工程』第十九卷第一期，其中有多篇論文專門去探討橋梁結構性能之耐震設計。重大工程要設強震監測設備進行監測，例如，通過大壩周圍之地震監測網站測試大壩所在地區發生之地震信號或大壩水庫蓄水期間產生之水庫誘發地震信號，並根據這些地震紀錄對大壩之抗震安全進行綜合分析及評價，並制定相關解決方案是必要的。在具有附加集中質量、彈簧及集中阻尼之系統上，傳統上控制振動一般都是透過阻尼器來達到減震的效果。

Gürgöze [2] 在具有集中高質量附載、線性旋轉彈簧與阻尼系統懸臂樑上提出一系統化之近似特徵方程式，並且針對一具有阻尼器懸臂樑上作數值運算。Chang [3] 利用拉普拉斯變換(Laplace transform)與變數分離法(Separation of Variables)求得具有集中質量、

彈簧及黏滯阻尼之均勻樑的特徵值(Eigenvalue)及模態。Ziesman [4] 利用有限元素法計算出 Timoskeno beam 之特徵值。Kangsheng [5] 採用 Kelvi-Vogit 模型以能量法驗證得知其能量消散是以指數方式衰減。Krenk [6] 將阻尼結構系統振型分為對稱型及非對稱型加以探討，並由根軌跡圖上找出其系統阻尼頻率之虛部為最大時之最佳阻尼比。Philip [7] 利用 Lagrange's equation 在不同集中元素多跨距樑之情況下導出其不同運動方程式，並利用數值分析軟體(MATLAB)求出其特徵值，並將其結果與有限元素法(Finite element method)互相比較，其兩者方法之結果相當吻合。則 Lin 及 Chang [8] 在具有彈性支承之多跨距樑上則利用傳遞矩陣法來得到此方面之特徵解。

本研究將針對二自由度結構體在基座激振下以不同諧波激振力(輸入訊號)，再量測該系統之兩個穩態響應(輸出訊號)，同時將量測所得之兩個系統響應訊號，再與輸入激振訊號做乘積調變，接著求取該調變後訊號之傅立葉係數，並藉由該傅立葉係數及以本研究所提供之公式計算出結構體本身之系統阻尼耗能及阻尼比。

### 2. 內容及理論

#### 2.1 定義單輸入調變法

參考圖1之系統，令一單自由度(SDOF)之系統以基座激振  $u(t)$  作用，則其運動程式可表示成：

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{u}) + k(z - u) = 0 \quad (1)$$

上式中之  $m$  代表系統質量、 $c$  代表系統阻尼及  $k$  為系統勁度。故系統響應  $z(t)$  可表示成

$$z(t) = \left[ \frac{1 + i(2r\zeta)}{(1 - r^2) + i(2r\zeta)} \right] U e^{i\Omega t} = Z e^{i(\Omega t - \Phi)} \quad (2)$$

若基座激振  $u(t)$  是諧波，或以複數式表示：

$$u(t) = U e^{i\Omega t} \quad (3)$$

上式中， $i = \sqrt{-1}$ 。另外，由於阻尼的存在，故造成輸入激振與系統響應間之相位差  $\Phi$ ，恰可表示成

$$\tan \Phi = \frac{2\zeta r^3}{(1 - r^2) + (2r\zeta)^2} \quad (4)$$

前述這些式子裡，已經使用了下列之參數符號：

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (5)$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (6)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (7)$$

其中(5)式之 $\zeta$ 即為量測目標之阻尼比。

為更進一步說明本研究之背景理論，令輸入訊號

$$u(t) = U \sin(\Omega t) \quad (8)$$

則系統穩態響應可表示成

$$z(t) = Z \sin(\Omega t - \Phi) \quad (9)$$

因此，若將之系統穩態響應與激振訊號做乘積調變，或寫成

$$g(t) = u(t) * z(t) = U \sin(\Omega t) * Z \sin(\Omega t - \Phi) \quad (10)$$

但，上式也可以利用三角等式寫成

$$g(t) = \frac{r_z * U^2}{2} [\cos \Phi - \cos(2\Omega t - \Phi)] \quad (11)$$

其中， $r_z$ 由(2)式定義或

$$r_z = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

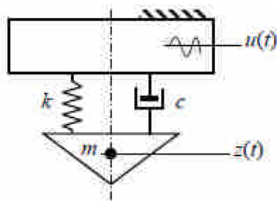


圖 1 單自由度之基座激振示意圖

## 2.2 定義多自由度方程式

參考圖2之系統，令一多自由度之系統以基座激振 $y(t)$ 作用，則其運動方程式可以表示成：

$$[m] \ddot{\bar{x}} + [c] \dot{\bar{x}} + [k] \bar{x} = \bar{F} \quad (13)$$

上式中之 $m$ 代表系統質量、 $c$ 代表系統阻尼及 $k$ 為系統勁度。且將上式阻尼矩陣表示成由質量與勁度組合成

一線性矩陣：

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k] \quad (14)$$

其中(14)式之係數 $\alpha, \beta$ 可由(15)式獲得

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (15)$$

$$\beta = \frac{2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$$

在(15)式中之 $\omega_1, \omega_2$ 即為結構系統之自然頻率，可由有限元素計算或從實驗量測所獲得。而 $\zeta_1, \zeta_2$ 阻尼比則必須從調變後訊號之傅立葉係數中計算出系統之阻尼比。

將一線性阻尼(14)代入多自由度運動方程式(13)可表示成

$$[m] \ddot{\bar{x}} + [\alpha [m] + \beta [k]] \dot{\bar{x}} + [k] \bar{x} = \bar{F} \quad (16)$$

由多自由度系統運動方程式(16)找到其 $n$ 個結構自然頻率，並且將其結構自然頻率作為輸入激振頻率訊號 $\Omega = \omega_n$ ，最後可寫成一 $n$ 個非耦合微分方程式

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \bar{Q}_i(t), \quad i=1,2,\dots,n \quad (17)$$

其中

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad \text{及} \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}}$$

若令外力函數為一諧波函數，不管是線性或非線性，其穩態解都應可以表示成：

$$q_p(t) = q_{p0} + q_a(t) = q_{p0} + q_a \sin(\Omega t - \phi) \quad (18)$$

## 2.3 乘積調變法

將系統穩態響應(輸出訊號)與激振訊號(輸入訊號)做乘積調變，可寫成

$$g(t) = Q(t) * q_p(t) = \frac{Q * q_a}{2} \cos \phi + q_{p0} Q \sin(\Omega t) - \frac{Q * q_a}{2} \cos(2\Omega t - \phi) \quad (19)$$

藉由觀察調變後訊號(19)式之傅立葉係數，參考圖2。可計算出其相位角 $\cos \phi$ ：

$$\cos \phi = \frac{2a_0}{Q * q_a} \quad (20)$$

進一步以 $\tan \phi$ 計算出系統之阻尼係數，也即若令 $G_0 = \tan \phi$ ，則阻尼係數 $\zeta$ 可表示成

$$\zeta^2 = \frac{1}{8} \left[ 2 + \frac{(G_0^2 - 8)}{G_0^{2/3} \Lambda} + \frac{\Lambda}{G_0^{4/3}} \right] \quad \text{若 } G_0 \leq \sqrt{8} \quad (21)$$

及

$$\zeta^2 = \frac{1}{16} \left[ 4 - (1+i\sqrt{3}) \frac{(G_0^2-8)}{G_0^{2/3}\Lambda} - (1-i\sqrt{3}) \frac{\Lambda}{G_0^{4/3}} \right] \text{ 若 } G_0 > \sqrt{8} \quad (22)$$

之實數部份值。其(21)式及(22)式中之參數

$$\Lambda = \sqrt[3]{8 - 20G_0^2 - G_0^4 + 8\sqrt{(1+G_0^2)^3}} \quad (23)$$

更進一步觀察圖 3 之傅立葉係數，也可計算出系統阻尼耗能：

$$W_d = \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_0^2} \quad (24)$$

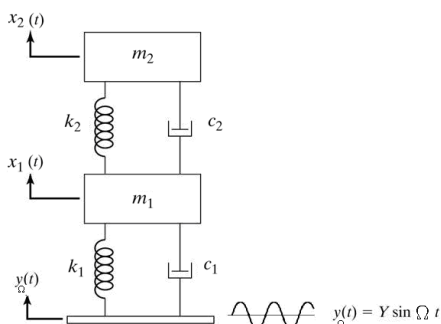


圖 2 二自由度結構體輸入一弦波激振力之示意圖

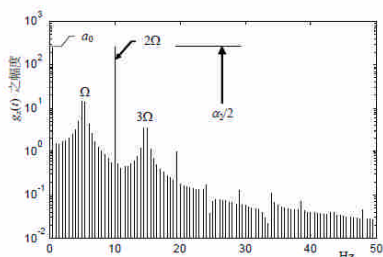


圖 3 系統穩態響應(輸出訊號)與激振訊號(輸入訊號)調變後之傅立葉

### 3. 動態模擬

由於電腦分析軟體發展進步，已經有許多軟體適用於作動態模擬之電腦分析，常見的有 Working Model、ADAMS 等，而本研究是以 MATLAB 中的 SIMULINK 模擬方塊圖來對結構之動態系統來進行建模、分析及模擬。

本研究真實系統為一多自由度運動方程，而為了確認真實系統的動態響應，本研究所採用的 SIMULINK，經由模擬方塊圖的方式，來觀察真實系統之穩態輸出訊號及輸入訊號。並將多自由度系統運動方程式(17)以模擬方塊圖的方式接線，運算求解。

由多自由度系統運動方程式(17)找到其 n 個結構自然頻率，並且將其結構自然頻率作為輸入激振頻率訊號  $\Omega = \omega_n$ ，最後將所運算出來的穩態輸出訊號及輸入激振訊號進行乘積調變法後，觀察其傅立葉係數。

### 3.1 參數設定

模擬結果之精準度通常與設定相關參數的正確性有很大的關係，所以必須設定符合實際狀況的參數來進行模擬結果。

為了找尋結構本身之固有自然頻率，先將其結構無阻尼之多自由度之運動方程式由 SIMULINK 建構模擬方塊圖，如圖 4 所示，來進行掃頻尋找結構之固有自然頻率。在掃頻設定參數上，輸入時間為前 5 秒，掃頻範圍以 0 Hz 增加到 200 Hz，如圖 5 所示，並且將掃頻尋找到的結構固有自然頻率作為輸入激振訊號，藉此再將系統之兩個穩態響應(輸出訊號)與輸入激振訊號做乘積調變，接著求取該調變後訊號之傅立葉係數。

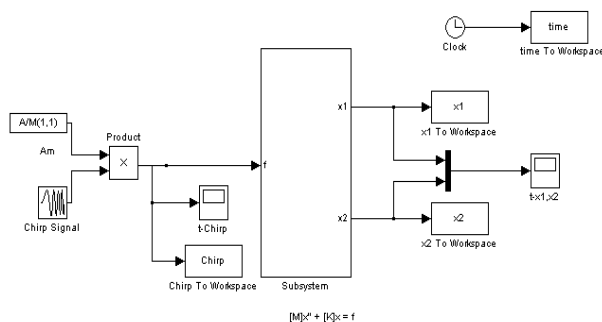


圖 4. 無阻尼系統之模擬方塊圖

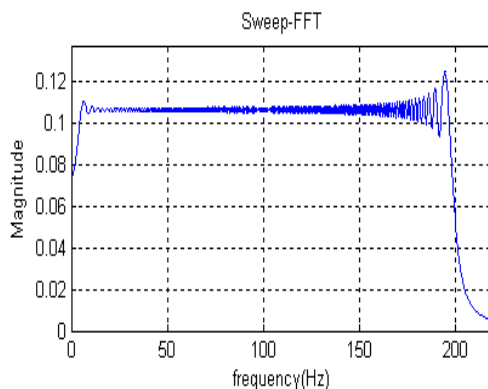


圖 5 輸入掃頻訊號 0~200 Hz 之頻域圖

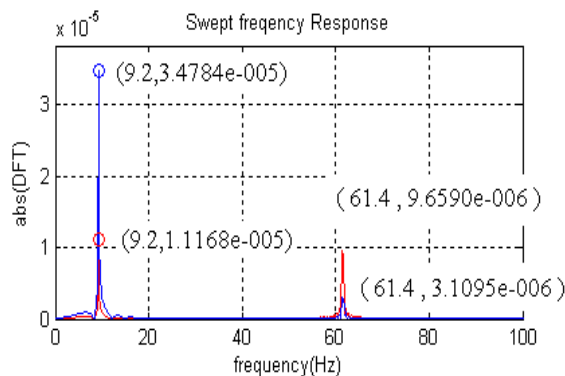


圖 6 以掃頻獲得結構之自然頻率圖

### 3.2 模擬結果：量測二自由度結構之阻尼比

觀察圖 6，二自由度無阻尼結構系統的自然頻率  $\omega_1$ ， $\omega_2$  分別為 9.2 Hz 及 61.4 Hz。將所量測到的自然頻率  $\omega_1$ ， $\omega_2$  分別作為在二自由度阻尼結構系統上之輸入激振頻率  $\Omega_1$  及  $\Omega_2$ ，在輸入低頻及高頻激振頻率下之取樣頻率分別為 150Hz 及 400Hz，且量測輸入不同激振頻率下之兩輸出穩態時域訊號及最大輸出穩態訊號  $X_{i\Omega}$ ，如圖 7 及圖 8 所示。

在阻尼結構系統上，必須要考慮到輸出穩態訊號會產生相位落差的現象。所以必須將無阻尼結構系統之數值模擬出來的模態振型作為主要的參考指標，並將阻尼所造成相位落差予以正確修正。

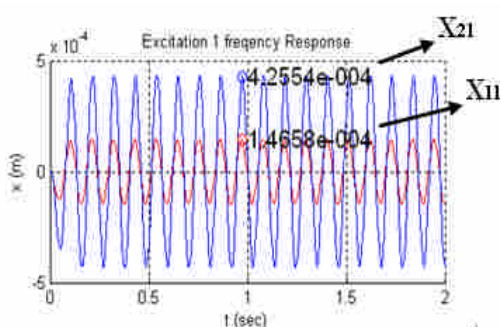


圖 7 輸入激振頻率  $\Omega_1 = 9.2\text{Hz}$  之兩輸出時域圖

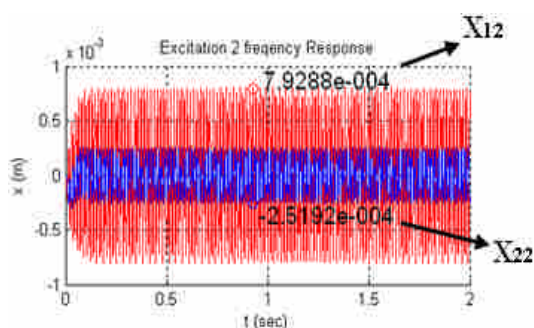


圖 8 輸入激振頻率  $\Omega_2 = 61.4\text{Hz}$  之兩輸出時域圖

觀察圖 7、圖 8 在輸入不同激振頻率下之最大輸出穩態訊號  $X_{i\Omega}$  來求取二自由度阻尼結構系統的模態振型，並與二自由度無阻尼結構系統的模態振型作比較。如圖 9 所示，阻尼系統所量測到的模態振型與無阻尼數值模擬出來的模態振型是非常吻合的。

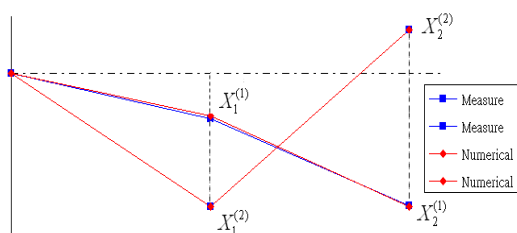


圖 9 阻尼系統與無阻尼模態振型比較

觀察圖 10、圖 11 在輸入不同激振頻率下分別與在不同激振頻率所量測到之兩個輸出穩態訊號進行乘積調變，並且觀察其經過調變過後訊號之傅立葉係數，如直流項之位準及二倍頻項之位準。再經由本研究所提供之公式可計算出本研究之二自由度阻尼結構系統的功率消耗皆為正數，其代表本系統為可行之系統。並且為了更進一步的獲得結構系統之阻尼比，也是觀察圖 10 及圖 11 經過調變過後訊號之傅立葉係數，可計算出本結構系統之阻尼比。在輸入激振頻率  $\Omega_1 = 9.2\text{Hz}$  獲得之阻尼比為  $\zeta_1 = 0.448$  及  $\zeta_2 = 0.499$ ，而在輸入激振頻率  $\Omega_2 = 61.4\text{Hz}$  所獲得之阻尼比為  $\zeta_1 = 0.492$  及  $\zeta_2 = 0.491$ ，其最大誤差量在 9% 左右，最小誤差量為 1% 左右。

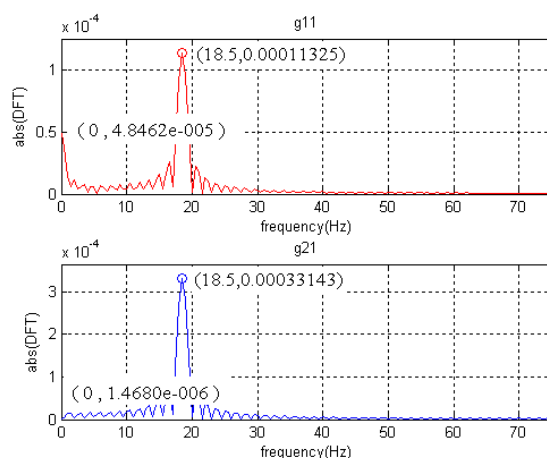


圖 10 在輸入激振訊號  $\Omega_1 = 9.2\text{Hz}$  調變後之頻域圖

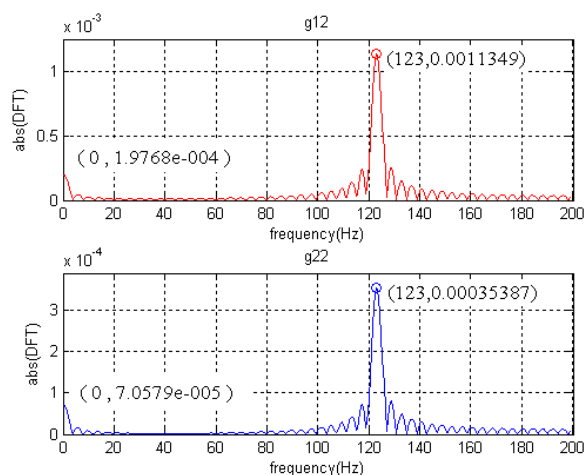


圖 11 在輸入激振訊號  $\Omega_2 = 61.4\text{Hz}$  調變之後頻域圖

## 4. 實驗研究

研究多自由度結構體是十分耗時且費力的一件事，因此我們在實驗上，是以二自由度結構體來作為這次研究的主軸。因此，在製作模型之前，首先針對二自由度結構系統的幾個重要特徵來作探討，例如，懸臂樑的勁度值、阻尼比等，實驗設備之製作與架設詳細說明如下。

#### 4.1 實驗設備及配置

參考圖 12 實驗流程，輸入端透過激振器輸入一連續 sin 波訊號至二自由度結構體上，而輸出方面經由黏貼於懸臂樑上的質量塊上之單軸加速規將量測得之加速度訊號傳遞至 B&K 頻譜分析儀，記錄並分析。

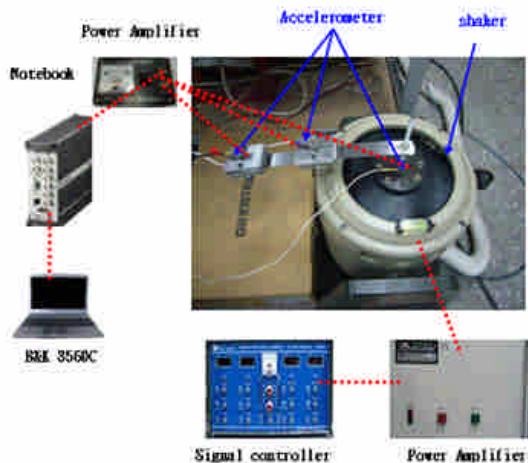


圖 12 實驗設備架構系統流程圖

#### 4.2 實驗模型

參考圖 2，二自由度阻尼結構系統其結構主要包含了幾個重要的元件，包括懸臂樑、質量塊、結構體本身的微小阻尼，及結構體接觸外加黏滯液體取代結構體本身的微小阻尼。在製作模型過程當中，必須針對幾個重要特徵來作探討。二自由度阻尼結構模型請參考圖 13。將其結構固定於垂直激振器上，其懸臂樑材料為不銹鋼。本研究著重於質量塊與懸臂樑之間的動態特性，因此在製作結構模型上是選用強度高的懸臂樑，使自然頻率不會影響到我們所要觀察的成果。



圖 13 二自由度阻尼結構系統模型

影響結構系統之自然頻率主要參數之一為懸臂樑本身之勁度，因此我們進行模擬時主要觀察為懸臂樑之性質。其懸臂樑的勁度值大小為懸臂樑之截面慣性矩所決定的，且將懸臂樑實體模型上置放兩質量塊所造成的變形量來做運算，如圖 14 結果顯示，將兩塊質量視為兩個集中力施加於在懸臂樑前端及中間部分，再除上應變規所量測出兩點之變形量，即為懸臂樑本身之勁度值。

在數值運算上使用線性疊加法計算出懸臂樑兩點變形量的結果為 
$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$
 與實際實驗所量測到的勁度數值差距不大。

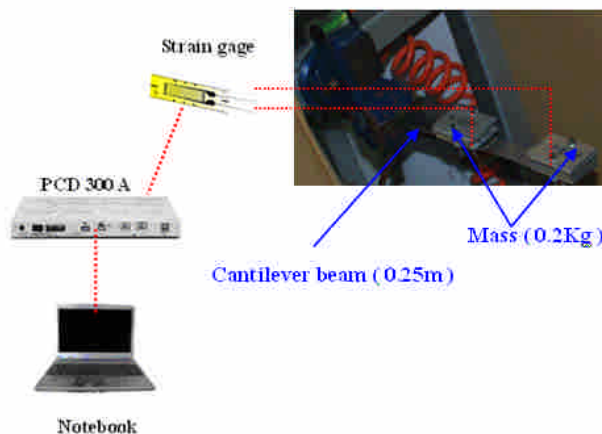


圖 14 量測結構勁度值之結構系統流程圖

#### 4.3 實驗過程與結果

本實驗結果與模擬作一比較探討。懸臂樑長度為 0.25 公尺，在懸臂樑上附加兩塊質量塊皆為 0.2 公斤其質量塊彼此間距各為 0.125 公尺。輸入訊號上以激振器輸入一連續訊號，及搭配上述條件，擷取分別黏貼單軸加速度規於懸臂樑之兩個質量塊上之加速度訊號，再使用 B&K 3560C 內建的 FFT 功能來觀察雙自由度結構之訊號。

圖 15 雙自由度結構之自然頻率

圖 16 在輸入激振訊號  $\Omega_1$  調變後之頻域圖

圖 17 在輸入激振訊號  $\Omega_2$  調變後之頻域圖

#### 5. 結論

本研究分別以數值模擬及實驗兩部分針對雙自由度結構體做深入探討。在數值模擬上利用雙自由度結構體推導之運動方程式予以適當的假設及再線性化，藉由在懸臂上附加相同重量之兩塊質量塊  $m_1, m_2$ ，並將所量測輸入訊號及輸出穩態訊號，利用積調變法來計算出雙自由度結構體之相關參數。

實驗部分，會發現雙自由度結構體為一非線性結構系統，而非線性現象會造成系統之自然頻率偏移，且非線性影響越大，頻率偏移的範圍也就越多。所以在模擬

上以一線性結構系統來進行模擬確實會與實驗有一定的落差，但藉由實驗所量測到自然頻率，分別作為輸入激振訊號，並且量測輸入訊號及輸出穩態訊號進行積調

## 6. 參考文獻

- [1] 日本中央政府經濟產業省原子力安全保安院統計資料。  
<http://www.aec.gov.tw/upload/1185861809960731.pdf>
- [2] M. Gürgöze and H. Erol, "On the eigenvalues of viscously damped beams, carrying heavy masses and restrained by linear and torsional springs," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 208, 1997, pp. 153-158.
- [3] T.P Chang, F.I Chang and M.F. Liu, "On the eigenvalues of a viscously damped simple beam carrying point masses and springs," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 240, 2001, pp. 769 - 778.
- [4] L. Ziensman, N.F. J Van Renjburg, A. J. van 變來計算出雙自由度結構系統之阻尼耗能及阻尼比等是可行的。
- [5] der Merwe, "A Timoshenko beam with tip body and boundary damping," *Wave Motion*, vol. 39, 2004, pp. 199 - 211.
- [6] Kangheng Liu, "Exponential decay of energy of vibrations string with local visco-Elastic," *Math phys*, vol. 53, 2001, pp. 265 - 280.
- [7] Steen Krenk, "Complex modes and frequencies in damped structural vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 270, 2004, pp. 981 - 996.
- [8] Philip D. Cha, "A general approach to formulating the frequency equation for a beam carrying miscellaneous attachments," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 286, 2005, pp. 921 - 939.
- [9] Hai-Ping and S.C Chang, "Free vibration analysis of muti-span beams with intermediate flexible constrains," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 281, 2005, pp. 155 - 169.
- [9] 黎文龍，工程設計與分析：創思設計分析與模擬，東華書局，民國 89 年。

## ABSTRACT

The present patent is a method for measuring the damping ratio of a structural system that is under base excitations. The method is accomplished by processing the response signal with respect to that of the input. In other words, one is to measure the responses of the system, which is excited by an input sinusoidal signal. Once the response signal is obtained, it can be modulated by two different reference signals. The required dissipative energy, damping ratio, or even system damping can be thus extracted from the modulated signal by the given equation through its Fourier coefficients. In addition, the current method does not require the system damping to be small and valid for a wide range of damping ratios.

**Keywords:** Dissipative energy、Damping ratio、Identification of damping

## A new system identification method for two-degree-of-freedom base- excited systems

Wenlung Li, ChingChun Su

National Taipei University of Technology  
Graduate Institute of Manufacturing  
Technology