

塔式起重機結構之動態穩定性研究

The Dynamic Stability of Tower-Crane-Like Structures Working on Construction Sites

黎文龍* 張庭源 張智健
台北科技大學 製造科技研究所

*E-mail: wlli@ntut.edu.tw

國科會計劃編號: NSC 96-2221-E-027 -084

摘要

本研究主要探討類似於建築施工之塔式起重機結構，其斜張式吊臂在不同操作角度，及不同的吊重下，所產生的動態特性，特別是當結構在產生內共振(internal resonance)之狀態下，其可能之潛在危險因子。在本研究之過程中，先將塔式起重機系統模型簡化成一離散系統，以 Lagrange 方程式推導出該離散系統的運動方程式，再將運動方程式予以線性化，找出其可能產生內共振的範圍，再以 MATLAB SIMULINK 確認該系統的動態響應。本研究討論系統在 1/2 內共振所引起的能量傳遞。一般地震的動頻率大都是 20 Hz 以下的低頻振動，本研究之結果顯示，隨著吊重質量比 μ 值之增加，結構系統的自然頻率會往低頻移動，從而增加了系統自然頻率落入地震振動頻寬內之風險，此外，更由於內共振存在之可能性，使得系統結構之能量，在兩相關模態間，互相遞傳、振盪，造成某些特定模態之動態不穩定。此外，在本研究之實驗結果顯示，非線性之模擬結果與實驗者吻合，而結構系統之非線性與操作時之仰角、吊掛物重交互影響是主要之因子。

關鍵詞：塔式起重機、內共振、動態穩定性。

1. 前言

近年來，台灣由於建築技術的進步，五十層以上的高樓比比皆是，塔式起重機由於可以提供較高的起重高度和較大的工作範圍，被廣泛的使用在建築物上，其本身揚程高，構件重、體積和載重量都相當大，若本身造成破壞或是吊物掉落，將會產生相當嚴重的災害事故，因此，在勞工安全衛生法中，明文規定其為危險性機械。

在 2002.03.31 下午花蓮秀林東方外海發生規模 6.8 級強震。當時台北最大震度為芮氏規模 5 級，卻造成台北國際金融中心新建工程施工用之兩部塔式起重機崩落 [2]，總計有 5 名工人死亡、19 人輕重傷，而國際金融中心的主樓與群樓已施工的結構也為掉落的塔吊所破壞。由於上述原因，國內學者紛紛對於地震會對塔式起重機造成什麼影響進行研究。中華民國結構工程學會季刊『結構工程』第十七卷第三期便是 2002 年 331 地震專刊，其中有多篇論文專門去探討塔式起重機的耐震問題。國內其他針對這個問題的研究，如李 [3]、蕭 [4] 等人將起重機的吊臂和吊掛物重簡化為在塔身上方的集中質量塊，並利用 SPA2000 動力分析軟體去探討塔身所

受地震力的影響。

此外，在國外針對塔式起重機的理論研究中，Ju etc.[5] 等人將塔式起重機系統模型化，推導出系統的運動方程式，藉由適當的假設將方程式給簡化，並利用 FEM 分析軟體找出整個塔式起重機的自然頻率，Wang 及 Bajaj [6] 等利用線性項模擬出 3 樑結構可能會發生內共振的條件，然而以上研究，鮮少針對吊掛物重和吊臂之間的動態特性去作描述，對於一個起重機系統的運動過程中仍有不足之處。

我國塔式起重機設計規範有內政部於民國 94 年發布的『固定式起重機安全檢查構造標準』，以及國家標準『CNS 6426 B1216 起重機鋼結構部分之計算標準』，採用容許應力設計法，容許地震力為 0.2 倍塔吊自身的重量，且不必考慮吊物的重量 [2]，不過，由本研究之前的結果 [7] 顯示，當吊掛物種增加，隨著伸臂之角度不同，整體吊車結構除了國家標準所考量之靜態不穩定外，也相當程度地呈現了動態穩定。特別是當塔式起重機結構若是設置於高樓層上施工，由於地震輸入放大效應，如果系統結構與建築物的週期過於接近，或系統結構內部設計、仰角與吊重間某些特定條件存在，則容易產生共振或動態不穩定現象，決非簡單的 0.2W 設計地震力就能保證其耐震安全性。

本研究將針對類似於塔式起重機之結構，考慮吊臂特性做一完整描述，並考量其運作時所呈現不同的仰角與吊掛物重之改變所造成之動態特性，特別考慮其可能發生結構系統內共振的條件，在結構系統承受到地震力等外力影響分析，提供設計者、操作者，乃至於安全把關者之參考依據。

2. 系統模型化

若將塔式起重機之吊臂(伸臂)與吊掛物重離散化模型處理，參考圖 1 及圖 2。圖 1 中，塔式起重機主要工作機構有幾個部份，分別為塔身、吊臂、吊索、和吊掛物重等，相當於圖 2 中， l 為吊臂長度， α 為吊臂與 Z 軸之夾角， β 為吊臂投影在 X-Y 平面上與 Y 軸之夾角， x 、 y 、 z 為輸入振源訊號位移量， q_1 為吊臂末端之彈性位移， q_2 為吊臂末端在 X-Y 平面上之彈性位移， m_1 為塔身的集中質量， m_2 為吊臂之集中質量， m_3 為吊掛物之質量， R 為吊索長度， θ 為吊掛物與 Z 軸之夾角， R_0 為不同 α 角時塔身 H 加上吊臂離 X-Y 平面的高度。這些物理量在起重機結構系統中， α 、 R 、及 m_3 為可變參數，而 x 、 y 、 z 代表外界之輸入能量變數； l 、 m_1 、

m_2 為起重機本身結構設計尺寸，固定無法變動；而 q_1 、 q_2 與 θ 則是本研究所討論的三個動態參數。又本研究過程中，考慮系統之簡化，也將高度 H 於本研究中暫以剛體處理。方程式之推導簡述如下：

2.1 定義系統座標

定義系統的自由度，依前述之說明，本研究定義之系統有三個自由度，其廣義座標為 q_1 、 q_2 、 θ ，以 O 點為原點，則 m_1 、 m_2 、及 m_3 的位置向量分別為：

$$\mathbf{r}_1 = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + \{z(t) + H\}\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 &+ [(\ell \sin \alpha + q_1 \cos \alpha) \sin \beta + q_2 \cos \beta] \mathbf{i} \\ &+ [(\ell \sin \alpha + q_1 \cos \alpha) \cos \beta - q_2 \sin \beta] \mathbf{j} \\ &+ [\ell \cos \alpha - q_1 \sin \alpha] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + [R \cos \phi \sin \theta] \mathbf{i} + [R \sin \theta \sin \phi] \mathbf{j} - [R \cos \theta] \mathbf{k} \quad (3)$$

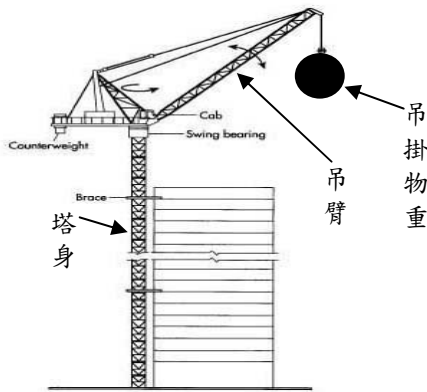


圖 1 塔式起重機示意圖

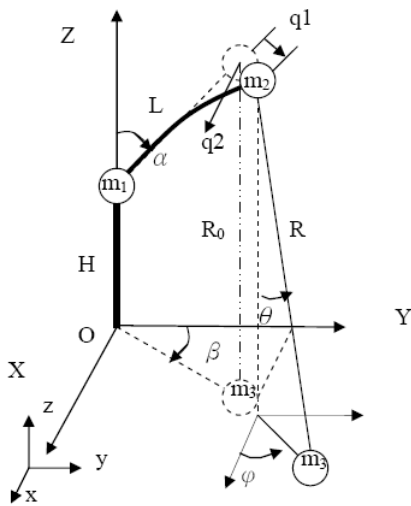


圖 2 塔式起重機離散系統示意圖

2.2 Lagrange 方程式

由(1)、(2)、(3)三式，可以推導出本系統的動能 T 及位能 V 方程式，則 Lagrangian 可表示成：

$$L = T - V \quad (4)$$

考慮一個具有 n 個自由度的系統，其廣義座標定義為 g_i ，若其不受阻尼力作用時，則 Lagrange 方程式之通式可表示成：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_i} = Q \quad (5)$$

利用數學計算軟體 Mathematica 5.1 將 L 代入(5)式中運算處理，可得本系統三條運動方程式：

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) \ddot{q}_1 &+ R m_3 \cos \alpha \cos \theta \sin(\beta + \phi) \ddot{\theta} \\ &- R m_3 \sin \alpha \sin \theta \ddot{\theta} + (m_2 + m_3) \cos \alpha \cos \beta \ddot{y} \\ &+ (m_2 + m_3) \cos \alpha \sin \beta \ddot{x} - (m_2 + m_3) \sin \alpha \ddot{z} \\ &- R m_3 \cos \alpha \sin \theta \sin(\beta + \phi) \dot{\theta}^2 + k_{q_1} q_1 \\ &- (m_2 + m_3) g \sin \alpha - R m_3 \cos \theta \sin \alpha \theta^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 &+ R m_3 \cos \theta \cos(\beta + \phi) \ddot{\theta} \\ &+ (m_2 + m_3) \sin \beta \ddot{y} + (m_2 + m_3) \cos \beta \ddot{x} \\ &- R m_3 \sin \theta \cos(\beta + \phi) \dot{\theta}^2 + k_{q_2} q_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R \ddot{\theta} &+ \cos \alpha \cos \theta \sin(\beta + \phi) \ddot{q}_1 + \cos \theta \cos \phi \ddot{x} \\ &+ \cos \theta \sin \phi \ddot{y} + g \sin \theta - \sin \alpha \sin \theta \ddot{q}_2 \\ &+ \cos \theta \cos(\beta + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

詳細之推導過程等，請參考[8]。

3. 數值模擬分析

由於線性組合方程式大都能夠滿足懸臂樑的幾何與自然邊界條件[6]，本研究遂先以一線性運動方程式來計算系統的自然頻率，簡化的過程如下所述，首先將 θ 限制在小角度，即 $\theta \approx 0$ ，接著再找出方程式內的線性項，並整理成質量矩陣 \mathbf{M} 和勁度矩陣 \mathbf{K} 。同時為了讓研究成果之應用更廣泛化，過程中並再進一步將質量以及勁度矩陣做無因次化，或令

$$\frac{m_3}{m_2} = \mu, \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \quad \omega_{11}^2 = \frac{k_{q_1}}{m_2}, \quad \text{及} \quad \omega_{22}^2 = \frac{k_{q_2}}{m_2}$$

代入即可得到無因次化的 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 矩陣：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (1 + \mu) & 0 & \mu \rho \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & (1 + \mu) & \mu \rho \cos \beta \\ \mu \rho \cos \alpha \sin \beta & \mu \rho \cos \beta & \mu \rho^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho \mu g}{R_0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

參數設定參考本文第 4.1 節裡不同的 μ 值及 θ 角，代入 Mathematica 5.1 計算(9)、(10)兩式 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特徵值，求出 $\omega_{n3} / \omega_{n2}$ ，所得結果繪製成圖並與實際觀察比較，結果顯示[7, 8]，以此線性簡化之結構系統，無法呈現動態穩定與否，例如，簡化系統之兩個自然頻率都呈現對 μ 值非常敏感，然而，不管是實驗，或是非線性之模擬，都顯示出第二個自然頻率幾乎不因仰角之改變而變等現象。因此，[7]報告中建議：簡化過後的線性運動方程式，只能適用在吊掛物重比較輕的情況，也就是較小的 μ 值及 α 角。

有鑑於此，本報告係以保留至二次非線性之系統為

觀察之重點。圖 3 為在不同的吊重比 μ 值及仰角 α ，其基本自然頻率之關係圖。

另外，由 [7, 8] 之報告中，我們已知 q_2 方向之自然頻率幾乎不會隨著 α 角或 μ 值變化，不過，若參考圖 3， q_1 方向自然頻率(基本頻率)會隨著 α 角及 μ 值不同，而向低頻變化偏移，或吊重越大、仰角與水平間夾角越小(即 $90 - \alpha$ 角)，則其基本頻率越低，越有可能落入地震之危險頻寬內，因此，根據本研究之結果，強烈建議限制或規範高層作業起重機結構之操作仰角與吊重。

另外，本研究特別關心的「起重機結構之 1:2 內共振現象」，由圖 3 中也清楚地呈現，由於 q_2 方向之自然頻率對 α 角或 μ 值均不敏感，大都固定在約 55 Hz 小幅度變化，因此，以 $\alpha = 15^\circ$ 為例時，可以觀察到可能會發生 1:2 內共振之條件，約為 $\mu \leq 8.6$ ，此時 q_1 方向的自然頻率約在 27.5 Hz，參考圖 3。

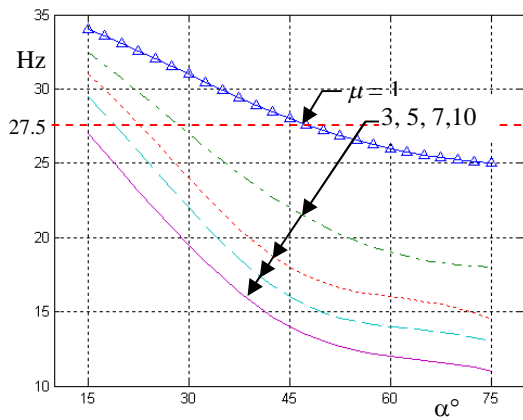


圖 3 不同 α° 狀態下之 q_1 方向自然頻率。

再觀察圖 3， q_1 方向之自然頻率的值，從圖中顯示，不管 μ 值為何，其自然頻率的值都將隨著 α 角的增加而減少，其減少的幅度也隨著 α 角的增加而益趨和緩；但在不同 μ 值差異下，當 μ 越大，其各種 α 角狀態的自然頻率將變小，基本上，這種趨勢符合吊車之幾何，也即為 α 角越大，或吊臂越接近水平時，因此吊臂長軸向 (q_1 方向) 之自然頻率就越小。另外，在 45° 之前，其斜率隨著 μ 值越大而越大，也就是說其自然頻率的變化量將隨著 μ 值增加而增加。

4. 動態模擬

通常用來計算 NNMs (nonlinear normal models) 的方法有兩種，一種是多重時間尺度 (multiple time scale)、另一種是不變流形 (invariant manifold)，而 NNMs 的概念能被看作是 LNMs (linear normal modes) 的延伸，不過本研究基於所要觀察的物理現象較具焦，此外，隨著電腦輔助分析軟體的發展，已經有許多適用於做動態模擬的電腦軟體，常見的如 ADAMS、Working Model 等，本研究以 MATLAB 裡面的 SIMULINK 模擬方塊圖來對動態系統進行建模、分析和模擬。

本系統的運動方程式為一聯立常微分方程式，要了解系統的動態響應必須先求此聯立常微分方程式的解。本研究採用的 SIMULINK，系透過模擬方塊圖的

方式，將微分方程透過兩次積分求解。

將系統的運動方程式 (6)、(7)、(8) 三條方程式移項並無因次化後，可以得到新的三條方程式，再以模擬方塊圖的方式接線，運算求解 [10]。

4.1 參數設定

模擬結果的精確度往往跟參數設定的正確與否有很大的關聯，設定符合實際狀況的參數，模擬結果才有討論的意義。 μ 值是 m_3 與 m_2 的質量比，是本次模擬的控制變因，其值分別為 1、3、5、7、10， α 為吊臂與鉛直線的夾角，也是本次模擬的控制變因之一，首先假設在塔式起重機操作過程中 α 角固定，其值分別為 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75° ， β 都固定在 30° 。 \ddot{y} 為振動源的加速度量值，以 331 地震為例，當時的地震加速度約為 1 m/sec^2 ，頻率約為 5 Hz。

R 為吊索長度， m_2 為吊臂之集中質量，根據不同的 α 角， R_0 和 ρ 也會有所不同，相關數據如表 1 所示。

表 1 不同 α 角 R_0 和 ρ 的值

α 角	15°	30°	45°	60°	75°	90°
R_0	0.81	0.76	0.69	0.6	0.49	0.38
ρ	0.37	0.39	0.43	0.5	0.61	0.79

4.2 模擬結果：1/2 內共振

由數值模擬分析的結果，我們觀察到了可能會產生 1/2 內共振的條件，不過，是否產生非線性耦合的共振，則是進一步觀察之重點，例如，複雜形式的能量交互作用與模型的非線性項的關聯性等。由於研究觀察之參數範圍龐大，本文僅顯示一小部分之結果，更詳細的報告可參考 [8]。本報告提出的觀察條件均相同，重要者如下： $\mu = 1$ 、 $\alpha = 15^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ 。

此外，系統模擬時間長度設定為 15 秒， \ddot{y} 輸入訊號為正弦掃描 (Chirp sine) 訊號，輸入時間為前 10 秒，掃頻範圍以 0.1 Hz 增加到 100 Hz，其他參數代入數值計算的結果， q_1 、 q_2 的頻域圖如圖 4 所示。

觀察圖 4， q_1 及 q_2 的自然頻率分別是 33 Hz 及 54 Hz，兩者約是 1.64 倍左右，而數值模擬計算的結果在 2 倍，兩者有些差距，這是由於 q_1 方向者相對地較容易受吊掛物重所造成的影響所致。此外，我們發現線性項所計算出來的數據會隨著 μ 值及 α 角的增加而造成相當大的誤差，其原因在於隨著 μ 值及 α 角的增加，吊掛物重所造成的非線性效應也就越明顯，造成自然頻率的偏移。

一般市面上常見之起重機系統在 α 角度時，約可以吊起 μ 值相當於 5 ~ 20 倍左右的物重，由單自由度非線性穩定振動系統中指出，其解在 1 階近似與 2 階近似並不相同，最大的不同點發生在共振區 [9]，因此，研究起重機結構之 1:2 內共振現象，顯然必須是以非線性之條件來進行。

在 α 角等於 15° 時的相同的情況下，1/2 內共振現象發生在 μ 值為 8.6 的地方，我們在 \ddot{y} 施以正弦掃頻，其

頻域圖如圖 6 所示。我們可以很明顯看出 q_2 的自然頻率是 q_1 的兩倍。

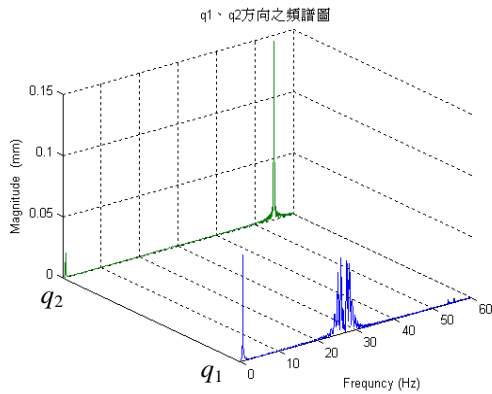


圖 5 $\mu=10$ 、 $\alpha=15^\circ$ 時 q_1 、 q_2 之頻域比較圖

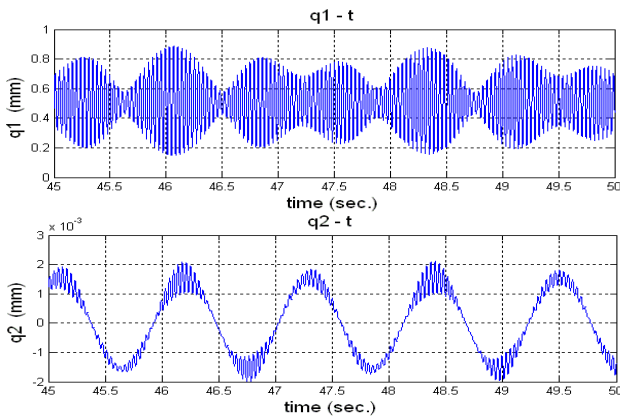


圖 6 外激頻率為 26.5 Hz 之未濾波後時域響應圖：

(a) q_1 方向、(b) q_2 方向

當外激頻率非常接近 1/2 內共振時，如圖 6 所示為 $\Omega = 26.5$ Hz 或相當於 $\Omega/\omega_1 = 0.965$ ， q_1 與 q_2 間開始有些許之能量傳遞，特別是在 q_2 之高頻部分，期振盪幅度開始變大，由於期間之能量傳遞並不明顯，故需要將訊號進一步處理，也即將低頻率去，旨觀察較高頻者，結果如圖 7 所示。如此過濾低頻訊號者，其實也相當於多重時間尺度法[14]類似，也即僅就短時間尺度訊號者觀察其物理特性。圖中顯示：能量之耦合以兩角度(θ 與 ϕ)者較為明顯，不過， q_1 則也失去原有規律之 beating (如圖 8 所示)，因此，也顯示出系統不穩定之過度現象。

觀察圖 6 ~ 8，可以看到除了 q_1 方向外，其它方向都有一個低頻的訊號耦合在時域圖裡，由於此低頻訊號太強，將會影響我們想觀察的結果，因此，我們透過一個 2 階高通濾波器，將 10 Hz 以下之信號過濾， q_2 方向則過濾掉 40 Hz 以下之訊號，其穩態訊號如圖 7 所示。這些模擬結果可以歸納出以下結論：

1. 離共振頻率越近， q_1 方向的振幅越大， q_2 方向也有此現象，兩者也可以觀察到 beating 現象。
2. 從時域圖來觀察， q_1 方向越接近自然頻率，殆週期運動(almost periodic motion)的現象越明顯； q_2 方向可以觀察到當 Ω 越接近 q_1 方向的共振頻率，同樣出現殆週期運動，表示能量在間相互傳遞。

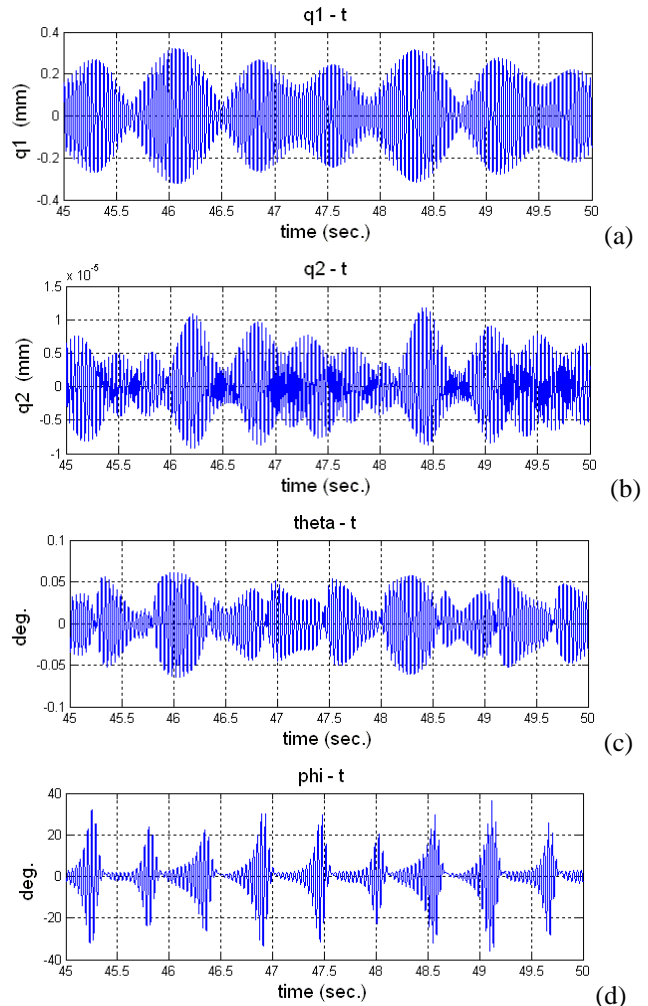


圖 7 外激頻率為 26.5 Hz 之濾波後時域響應圖：

(a) q_1 方向、(b) q_2 方向、(c) θ 方向、(d) ϕ 方向

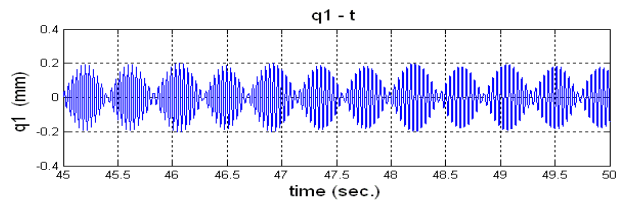


圖 8 外激頻率為 25.5 Hz 之 q_1 時域響應圖

3. θ 及 ϕ 方向在 Ω 越接近 q_1 方向的自然頻率時，同樣可以觀察到殆週期運動，這表示 q_1 方向的能量經由 θ 與 ϕ 傳遞給 q_2 方向所導致。而 θ 與 ϕ 間之能量相互傳遞之現象較 q_1 、 q_2 者先發生，這也解釋了[1]之實驗，總是先發生吊索之 θ 旋轉，才會停止。

另外，在 27.5 Hz 附近之結果，歸納如表 2。由於激振之頻寬位於第一自然頻率附近，如果非線性不發生作用，理論上，結構系統僅會反應在該激振頻率處，不過，表 2 中之結果明顯地說明了：當 $\Omega = 27.5$ Hz 時，系統之非線性的確可以將能量傳遞至第二個模態，造成第二個模態之反應大比例地增加。

表 2 不同外激頻率 q_1 與 q_2 方向之最大振幅

Ω / Hz	25.5	26.5	27.5	28.5	29.5
q_1 (mm)	0.7	0.85	4	1.2	0.8
q_2 (μ m)	0.006	0.012	0.18	0.03	0.012

另外，在外激頻率為 $\Omega = 27.5$ Hz 或相當於 $\Omega/\omega_1 = 1.0$ ，我們表現 40 ~ 50 秒之間的響應於圖 9。圖 9 仍顯示模擬時間 40 到 50 秒之間 q_1 、 q_2 方向的穩態時域圖，我們知道當某一系統產生內共振時，系統能量會在兩個模態之間傳遞[9]，由該時域圖中，系統能量確實會在兩模態間來回相互傳遞、產生振盪之現象，可以清楚地從時域圖上被觀察到，即所謂之殆周期運動。此外，若進一步將時域訊號轉成頻域訊號，再針對內共振附近之不同外激頻率所造成的頻譜差反應異性作討論，結果整理在[8]之報告中。

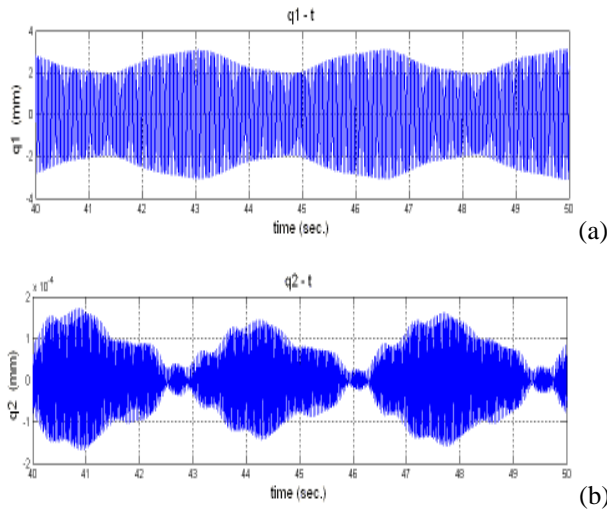


圖 9 $\mu = 8.6$ 、 $\alpha = 15^\circ$ 時之時域圖: (a) q_1 、(b) q_2

總之，在不同的外激頻率差異下來看， q_1 方向上的激振頻率在 27.5 Hz 時，其值最小， q_2 方向上由於產生 1:2 內共振， q_1 方向上的能量傳遞到 q_2 方向上， q_2 在此時的振幅也比其他頻率來得大，造成起重機在 q_2 方向上的不穩定。

由以上的模擬結果顯示，塔式起重機結構之吊臂在某些條件下，會產生垂直與橫向間之內共振，隨著吊臂不同的操作角度以及 μ 值，但會產生內共振的頻率也會改變，從而使得吊臂之動態設計更加的困難。另一方面，隨著 μ 值的增加， q_1 方向上的自然頻率會而下降，更接近高層大樓、地震之頻寬，這將對於高層作業之起重機，自然地增高了系統的不穩定的機率，也增加了起重機結構翻覆的危險性。

5. 實驗研究

實際上的塔式起重機系統十分龐大，在實驗上不太能從實際的塔式起重機上著手，因此，我們採取製作一個有著類似結構特性的模型。製作模型之前，首先萃取塔式起重機系統的幾個重要特徵，例如，吊臂的勁度

等，實驗設備之製作與架設詳細說明如下。

5.1 實驗設備及配置

參考圖 10 實驗流程，輸入端透過激振器，輸入一連續 sin 波訊號至滑車上，輸出方面經由黏貼於吊臂前端的三軸加速規將量測得之加速度訊號傳遞至 B&K 頻譜分析儀，記錄並分析。

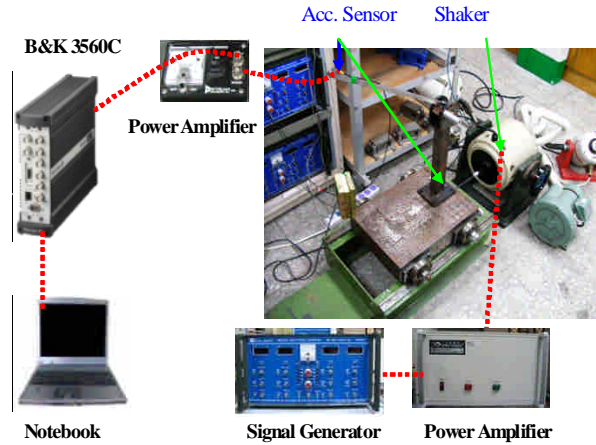


圖 10 實驗設備架構系統流程圖

5.2 實驗模型

參考圖 1，一般塔式起重機系統主要結構包含了幾個重要部分，塔身、吊臂、吊索，再加上吊掛物。在模型製作過程中，須將這幾個部分的特徵萃取出來。模型參考圖 11。將其固定在水平振動台車上，所有的材料皆為鐵。塔柱部分，由於本研究著重在吊臂和吊掛物重之間的動態特性，故將不討論塔柱所造成的效應，因此在模型的製作上便將其剛性加強，使其自然頻率不至於影響到我們所觀察的結果。

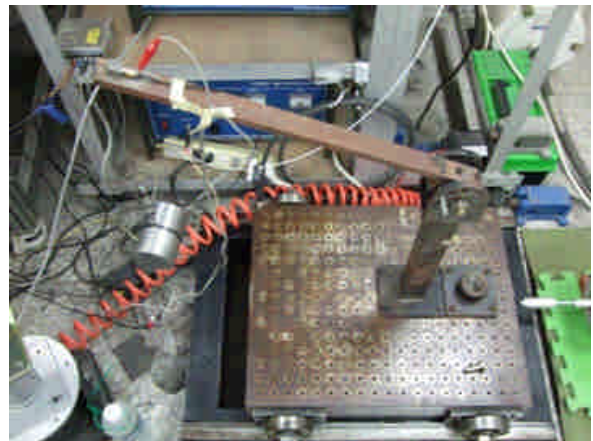


圖 11 塔式起重機實驗模型

影響系統自然頻率的主要參數之一就是勁度，我們進行模擬時主要觀察的參數 q_1 、 q_2 的勁度，便是吊臂的性質。前面提到 q_1 、 q_2 方向的彈性係數 k_{q1} 、 k_{q2} 值的大小乃是由吊臂的截面慣性矩所決定，將實體模型的吊臂將施力集中在吊臂前端，以 COSMOS 模擬，取得變形

量後，即可推算吊臂之勁性係數。詳請參閱[8]。

5.3 實驗過程與結果

本實驗將對模擬的結果做一驗證。在角的設定上與模擬相同取 15°，質量比 μ 則取 8.6。吊臂經離散運算後集中質量 m_2 約為 0.202 公斤，因此在搭配 μ 值的情況下， m_3 吊掛物重 1.737 公斤。輸入訊號則以激振器輸入一連續訊號，配合上述條件，擷取黏貼於吊臂末端之三軸加速規沿著 q_1 、 q_2 方向之加速度訊號，再利用 B&K 3560C 內建的 FFT 功能以觀察吊臂內共振。

實驗結果顯示，原預期之系統基頻與模擬者相同 (27.5 Hz)，不過由於實驗模型之製造不易掌握，因此模型系統之基頻向低頻略為偏移至 22 Hz，此外，實驗模型之 q_1 方向上的振幅，在此頻率下最小，和模擬結果大致吻合， q_2 方向上的振幅在此頻率最大，再隨著不同的激振頻率有變小的趨勢，但無庸置疑地，系統能量在此 1/2 內共振時，的確有相互傳遞的現象。參考圖 12 之頻域瀑布圖。

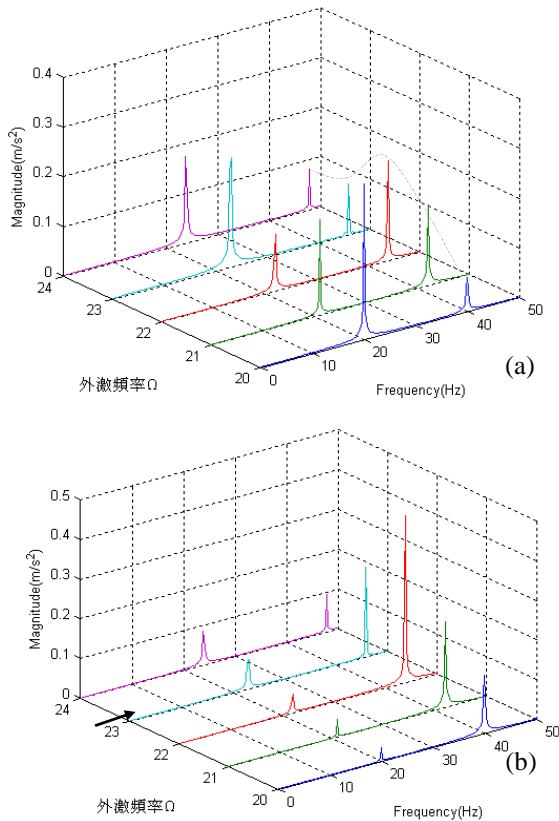


圖 12 $\mu = 8.6$ 時之頻域比較圖：(a) q_1 、(b) q_2 。

本研究遂分別將在前兩模態在 1/2 內共振之外激頻率附近之最大值找出，製作成圖 13，圖中可以更清楚的看出來 q_1 模態之能量損失，其實是造成第二模態 q_2 振幅增加之主因，也即外激之第一模態之能量，透過非系統線性之機制，在內共振之推波助瀾下，使得兩模態間之能量傳遞更加明顯，此實驗之結果完全與模擬者吻合。

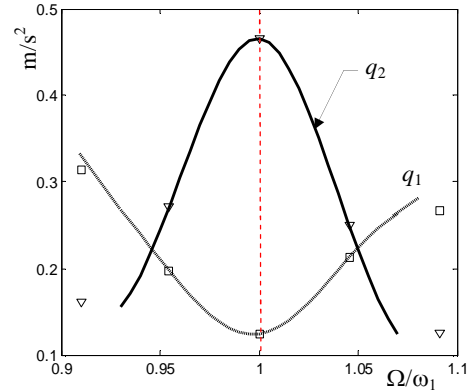


圖 13 於 1/2 內共振附近，兩模態之加速度比較圖 (▽、□：實驗；線條：曲線擬合)

6. 結論

本研究以數值模擬及實驗兩部分對高層建築之塔式起重機結構穩定性，做深入之探討。在數值計算模擬方面，本研究首先推導的起重機系統運動方程式作為理論基礎，找出系統非線性可能造成之動態不穩定現象，再特別針對內共振機制之影響，加以探討。研究程中，也先將起重機系統運動方程式予以適當的假設再線性化，不過，本報告僅係非線性者。藉由不同的吊臂仰角 α 、吊掛物重比 μ 去尋找參數，接著再用非線性運動方程式，觀察系統自然頻率會之變化，結果顯示，系統非線性與仰角、吊掛物重交互影響，確實會造成系統自然頻率向低頻偏移，更增加了本文所探討之 1/2 內共振之可能。在模擬結果方面，研究發現，內共振確實會兩模態間之能量相互傳遞，使得系統的更加不穩定，同時也發現，旋轉之模態會先產生該能量相互傳遞之現象。

實驗部分，本研究以自行設計製作的塔式起重機模型做為驗證，結果雖然大致吻合模擬，雖然因為實體模型屬於連續系統，與模擬之基頻略有差異，但本研究所要觀察之內共振，特別是兩模態間之能量相互傳遞現象，卻非常清楚，同時也證實了模擬之結果。此外，根據本研究之結果，由於系統非線性與仰角、吊掛物重交互影響是主要之因子，而實際運作上卻無法完全掌握吊車結構系統之設計參數，作者強烈地建議：限制或規範高層作業結構系統之操作仰角與吊重。

7. 參考文獻

- [1] 黃繼民，塔式起重機在高樓層施工之穩定性研究，國立台北科技大學自動化所碩士論文。
- [2] 蔡克銓、翁元滔、謝紹松，331 地震中台北國際金融中心大樓塔式吊車震害調查及分析研究，結構工程季刊，第十七卷，第三期，pp. 84-106，2002。
- [3] 李亦偉，超高層建築物施工起重機之耐震需求探討，國立台北科技大學土木與防災研究所。
- [4] 蕭鳳琳，高層建築物所裝置塔式起重機與設備之地震反應分析，國立台灣大學土木工程學研究所。
- [5] F. Ju a, Y.S. Choo a, F.S. Cui b, "Dynamic response of

tower crane induced by the pendulum motion of the payload,” *International J. of Solids and Structures*, 43 , pp. 376–389, 2006.

- [6] Fengxia Wang, Anil K. Bajaj, “Nonlinear normal modes in multi-mode models of an inertially coupled elastic structure,” *Nonlinear Dyn*, pp. 47:25–47, 2007.
- [7] 黎文龍、張庭源及劉建緯，第十六屆中華民國振動與噪音工程學術研討會，台北科技大學，民國 97.05.24，台北。
- [8] 張庭源，施工用塔式起重機之動態穩定性研究，國立台北科技大學自動化所碩士論文，2008.07。
- [9] R.M. Evan-Iwanowski, *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
- [10] Y. Ishida, T. Inoue, “Internal Resonance Phenomena of the Jeffcott Rotor With Nonlinear Spring Characteristics,” *Transactions of the ASME*, pp. 476-484 /vol. 126, 2004.
- [11] B. Jerman, P. Podrtzaj, J. Kramar, “An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion development and verification of a mathematical model,” *International Journal of Mechanical Sciences* , 46, pp. 729–750,2004.
- [12] Singiresu S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, 1987.
- [13] Kenneth G. McConnell, *Vibration Testing- Theory and Practice*, Wiley; 1995.
- [14] A.L. Nayfeh, and D.T. Mook , *Nonlinear Oscillations*.

The Dynamic Stability of Tower-Crane-Like Structures Working on Construction Sites

Wenlung Li, T.Y. Chang, C.C. Chang

**National Taipei University of Technology
Graduate Institute of Manufacturing Tech.**

ABSTRACT

The main objective of the present study is to find the dynamic characteristics and potential risk of tower cranes working on building structures on construction sites. A true tower crane system is modeled as a lumped mass discrete one. Equations of motion for the crane model system are then derived by applying the Lagrange’s method. The major interest of the present study is focused at the possible conditions of an internal resonance since the system is truncated to the second order nonlinear one. MATLAB_SIMULINK is chosen as the tool for estimating the dynamic response of the system. The system energy transferring between the two modes, that are involved the 1/2 internal resonance, through the mechanism of the nonlinearity. In addition, the fundamental natural frequency tends to move the lower side when the crane arm working angle closes to the horizontal plane. Moreover, the loads can be the other factor to reducing the natural frequency. That is, this phenomenon tends to increase the risk in case of earthquakes. Experiments are carried out after the completion of simulations. The results of the experiment verified those of simulations.

Keywords: Tower cranes, Internal resonance, Dynamic Stability of structures.