

施工用塔式起重機之動態穩定性研究

The Dynamic Stability of Tower Cranes Working on Construction

黎文龍* 張庭源 劉建緯

台北科技大學 製造科技研究所

*E-mail: wlli@ntut.edu.tw

摘要

本研究主要探討建築施工用之塔式起重機，其斜張式吊臂在不同操作角度下，及不同的吊重下，所產生的動態特性及潛在之危險。研究過程中，先將塔式起重機系統模型簡化成一離散系統，以 Lagrange 方程式推導出該離散系統的運動方程式，再將運動方程式予以線性化，找出其可能產生內共振的條件，最後再以 MATLAB SIMULINK 模擬該系統的動態響應，我們將討論系統在 1:2 內共振所引起的能量傳遞。一般地震的震動頻率大都是 20 Hz 以下的低頻震動。故當系統的自然頻率隨著 μ 值增加而往低頻移動時，便增加了系統自然頻率落入地震震動頻寬內之風險性。在實驗驗證方面，由實驗之結果顯示，透過沒簡化過後的運動方程式所找出來的條件和實驗結果相差不遠，簡化過後的運動方程式只適用於很小的 θ 角及 μ 值。此外，由於非線性項的所造成的效應，會使得自然頻率有所偏移。

關鍵詞：塔式起重機、內共振、動態穩定性。

1. 前言

近年來，台灣由於建築技術的進步，五十層以上的高樓比比皆是，塔式起重機由於可以提供較高的起重高度和較大的工作範圍，被廣泛的使用在建築物上，其本身揚程高，構件重、體積和載重量都相當大，若本身造成破壞或是吊物掉落，將會產生相當嚴重的災害事故，因此，在勞工安全衛生法中，明文規定其為危險性機械。

在 2002.03.31 下午花蓮秀林東方外海發生規模 6.8 級強震。當時台北最大震度為芮氏規模 5 級，卻造成台北國際金融中心新建工程施工用之兩部塔式起重機崩落 [2]，總計有 5 名工人死亡、19 人輕重傷，而國際金融中心的主樓與群樓已施工的結構也為掉落的塔吊所破壞。由於上述原因，國內學者紛紛對於地震會對塔式起重機造成什麼影響進行研究。中華民國結構工程學會季刊『結構工程』第十七卷第三期便是 2002 年 331 地震專刊，其中有多篇論文專門去探討塔式起重機的耐震問題。國內其他針對這個問題的研究，如李 [3]、蕭 [4] 等人將起重機的吊臂和吊掛物重簡化為在塔身上方的集中質量塊，並利用 SPA2000 動力分析軟體去探討塔身所受地震力的影響。此外，在國外針對塔式起重機的理論研究中，Ju etc. [5] 等人將塔式起重機系統模型化，推導出系統的運動方程式，藉由適當的假設將方程式給簡化，並利用 FEM 分析軟體找出整個塔式起重機的自然頻率，Wnag 及 Bajaj [6] 等利用線性項模擬出 3 樑結構可能會

發生內共振的條件，然而以上研究，鮮少針對吊掛物重和吊臂之間的動態特性去作描述，對於一個起重機系統的運動過程中仍有不足之處。

我國塔式起重機設計規範有內政部於民國 73 年發布的『固定式起重機安全檢查構造標準』，以及國家標準『CNS 6426 B1216 起重機鋼結構部分之計算標準』，採用容許應力設計法，容許地震力為 0.2 倍塔吊自身的重量，且不必考慮吊物的重量 [2]。但當塔式起重機架設於高樓上，由於地震輸入放大效應，且若塔式起重機與建築物的週期過於接近，容易產生共振現象，決非簡單的 0.2W 設計地震力就能保證其耐震安全性。

本研究將針對塔式起重機之吊臂特性做一完整描述，並考量其運作時所呈現不同的仰角與吊掛物重之改變所造成之動態特性，並考慮其會發生內共振的條件，在塔式起重機受地震力影響時，塔式起重機的受力將複雜化，或許本研究能提供在設計塔式起重機容許地震力時另一個思考的方向

2. 系統模型化

若將塔式起重機之吊臂(伸臂)與吊掛物重離散化處理，參考圖 1 及圖 2。圖 1 中，塔式起重機主要工作機構有幾個部份，分別為塔身、吊臂、吊索、和吊掛物重等，相當於圖 2 中， l 為吊臂長度， θ 為吊臂與 Z 軸之夾角， β 為吊臂投影在 X-Y 平面上與 Y 軸之夾角， x 、 y 、 z 為輸入振源訊號位移量， q_1 為吊臂末端之彈性位移， q_2 為吊臂末端在 X-Y 平面上之彈性位移， m_1 為塔身的集中質量， m_2 為吊臂之集中質量， m_3 為吊掛物之質量， R 為吊索長度， ϕ 為吊掛物與 Z 軸之夾角， R_0 為不同 θ 角時塔身 H 加上吊臂離 X-Y 平面的高度。這些物理量在起重機系統中， θ 、 R 、 m_3 、 x 、 y 、 z 為可變的參數； l 、 m_1 、 m_2 為起重機本身結構設計尺寸，固定無法變動；而 q_1 、 q_2 與 ϕ 則是本研究所討論的三個動態參數。又本研究過程中，先將 ϕ 限制於小角度上，以簡化系統之運動方程式。方程式之推導簡述如下：

2.1 定義系統座標

定義系統的自由度，依前述之說明，本研究所定義之系統有三個自由度，其廣義座標為 q_1 、 q_2 、 ϕ ，以 O 點為原點，則 m_1 、 m_2 、及 m_3 的位置向量分別為：

$$\mathbf{r}_i = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + \{z(t) + H\}\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + [(\ell \sin \alpha + q_1 \cos \alpha) \sin \beta + q_2 \cos \beta] \mathbf{i} \\ &+ [(\ell \sin \alpha + q_1 \cos \alpha) \cos \beta - q_2 \sin \beta] \mathbf{j} \\ &+ [\ell \cos \alpha - q_1 \sin \alpha] \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + [R \cos \varphi \sin \theta] \mathbf{i} + [R \sin \theta \sin \varphi] \mathbf{j} - [R \cos \theta] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

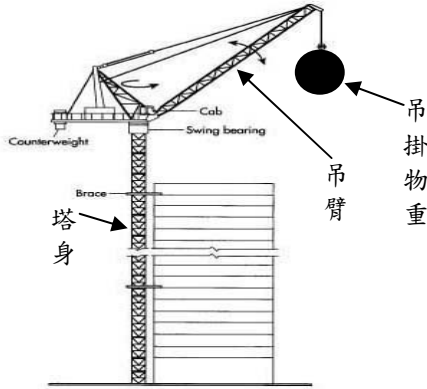


圖 1 塔式起重機示意圖

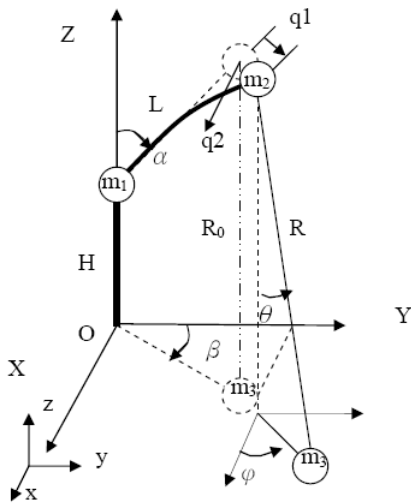


圖 2 塔式起重機離散系統示意圖

2.2 Lagrange 方程式

由(1)、(2)、(3)三式，可以推導出本系統的動能 T 及位能 V 方程式，則 Lagrangian 方程式可表示成：

$$L = T - V \quad (4)$$

考慮一個具有 n 個自由度的系統，其廣義座標定義為 g_i ，若其不受阻尼力作用時，則 Lagrange 方程式之通式可表示成：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_i} = Q \quad (5)$$

利用數學計算軟體 Mathematica 5.1 將 L 代入(5)式中運算處理，可得本系統三條運動方程式：

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) \ddot{q}_1 + R m_3 \cos \alpha \cos \theta \sin(\beta + \varphi) \ddot{\theta} \\ - R m_3 \sin \alpha \sin \theta \dot{\theta} + (m_2 + m_3) \cos \alpha \cos \beta \ddot{y} \\ + (m_2 + m_3) \cos \alpha \sin \beta \ddot{x} - (m_2 + m_3) \sin \alpha \ddot{z} \\ - R m_3 \cos \alpha \sin \theta \sin(\beta + \varphi) \dot{\theta}^2 + k_{q_1} q_1 \\ - (m_2 + m_3) g \sin \alpha - R m_3 \cos \theta \sin \alpha \dot{\theta}^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 + R m_3 \cos \theta \cos(\beta + \varphi) \ddot{\theta} \\ + (m_2 + m_3) \sin \beta \ddot{y} + (m_2 + m_3) \cos \beta \ddot{x} \\ - R m_3 \sin \theta \cos(\beta + \varphi) \dot{\theta}^2 + k_{q_2} q_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R \ddot{\theta} + \cos \alpha \cos \theta \sin(\beta + \varphi) \dot{q}_1 + \cos \theta \cos \varphi \dot{x} \\ + \cos \theta \sin \varphi \dot{y} + g \sin \theta - \sin \alpha \sin \theta \dot{q}_2 \\ + \cos \theta \cos(\beta + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

3. 數值模擬分析

通常用來計算 NNMs(nonlinear normal models)的方法有兩種，一種是多重時間尺度(multiple time scale)、另一種是不變流形(invariant manifold)，而 NNMs 的概念能被看作是 LNMs(linear normal modes)的延伸。

線性組合方程式能夠滿足懸臂樑的幾何與自然邊界條件[6]，我們遂先以一線性運動方程式來計算系統的自然頻率，簡化的過程如下所述，首先將 θ 限制在小角度，即 $\theta \approx 0$ ， $\sin \theta \approx \theta$ 、 $\cos \theta \approx 1$ ，接著再找出方程式內的線性項，並整理成質量矩陣 \mathbf{M} 和勁度矩陣 \mathbf{K} 。

再進一步將質量以及勁度矩陣做無因次化，或令

$$\frac{m_3}{m_2} = \mu, \quad \rho = \frac{R}{R_0}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_{q_1}}{m_2}, \quad \text{及} \quad \omega_2^2 = \frac{k_{q_2}}{m_2}$$

代入即可得到無因次化的 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 矩陣：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (1 + \mu) & 0 & \mu \rho \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & (1 + \mu) & \mu \rho \cos \beta \\ \mu \rho \cos \alpha \sin \beta & \mu \rho \cos \beta & \mu \rho^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho g \mu}{R_0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

參數設定參考 4.1 節裡不同的 μ 值及 θ 角，代入 Mathematica 5.1 計算(9)、(10)兩式 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的特徵值，求出 $\omega_{n3} / \omega_{n2}$ ，並製作成圖 3。

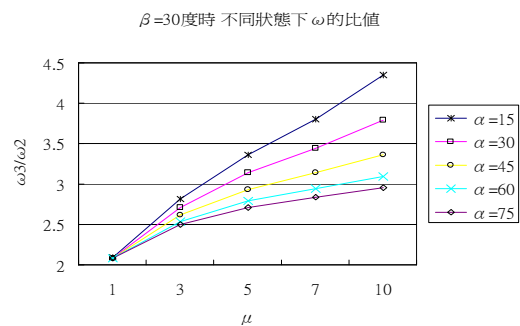


圖 3 不同狀態下 $\omega_{n3} / \omega_{n2}$ 的比值圖

觀察圖 3，可以看出在不同參數組合下顯示出的內共振，我們關心的部份在於 1:2 內共振，也就是 $\omega_{n3} / \omega_{n2}$ 接近 2 倍的地方，此時由於內共振形成的動態響應，能量

會從某一模態傳遞到另一模態上[7]，造成系統的不穩定，讓起重機有向 q_2 方向傾倒的可能。此外，由圖 3 也可以看出 ω_{n3}/ω_{n2} 的倍數隨著 β 角變小， μ 值增加而有越來越大的趨勢。

4. 動態模擬

隨著電腦輔助分析軟體的發展，已經有許多適用於做動態模擬的電腦軟體，常見的如 ADAMS、Working Model 等，本研究以 MATLAB 裡面的 SIMULINK 模擬方塊圖來對動態系統進行建模、分析和模擬。

本系統的運動方程式為一聯立常微分方程式，要了解系統的動態響應必須先求此聯立常微分方程式的解。本研究所採用的 SIMULINK，系透過模擬方塊圖的方式，將微分方程透過兩次積分求解。

將系統的運動方程式(6)、(7)、(8)三條方程式移項並無因次化後，可以得到新的三條方程式，再以模擬方塊圖的方式接線，運算求解。

4.1 參數設定

模擬結果的精確度往往跟參數設定的正確與否有很大的關聯，設定符合實際狀況的參數，模擬結果才有討論的意義。 μ 值是 m_3 與 m_2 的質量比，是本次模擬的控制變因，其值分別為 1、3、5、7、10， β 為吊臂與鉛直線的夾角，也是本次模擬的控制變因之一，首先假設在塔式起重機操作過程中 β 角固定，其值分別為 15 $^\circ$ 、30 $^\circ$ 、45 $^\circ$ 、60 $^\circ$ 、75 $^\circ$ ， β 都固定在 30 $^\circ$ 。 \ddot{y} 為振動源的加速度量值，以 331 地震為例，當時的地震加速度約為 1 m/sec²，頻率為 5 Hz。

R 為吊索長度， m_2 為吊臂之集中質量，根據不同的 β 角， R_0 和 ρ 也會有所不同，相關數據如表 1 所示。

表 1 不同 β 角 R_0 和 ρ 的值

β 角	15 $^\circ$	30 $^\circ$	45 $^\circ$	60 $^\circ$	75 $^\circ$	90 $^\circ$
R_0	0.805	0.761	0.691	0.6	0.494	0.38
ρ	0.547	0.578	0.637	0.733	0.891	1.157

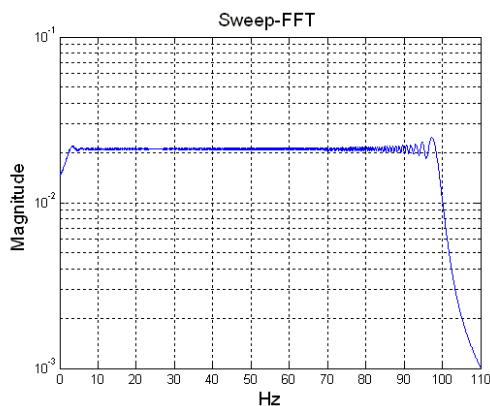


圖 4 輸入掃頻訊號 0.1~100 Hz 之頻域圖

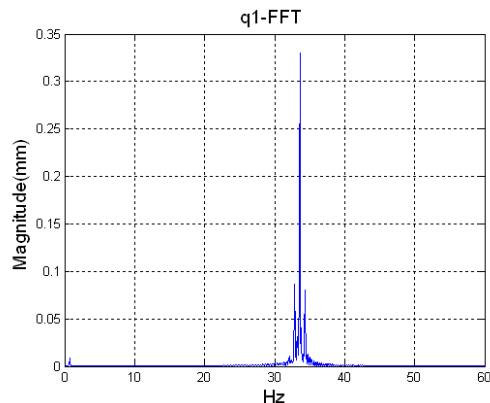


圖 5 $\mu=1$ 、 $\beta=15^\circ$ 時 q_1 之時域圖

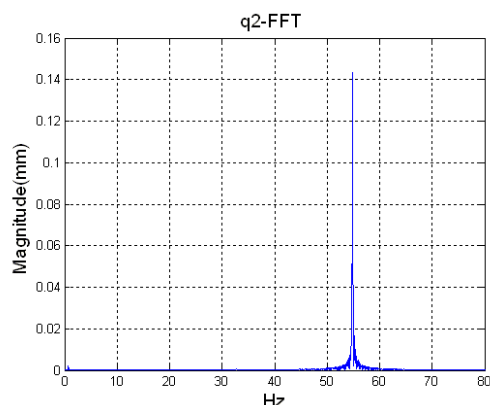


圖 6 $\mu=1$ 、 $\beta=15^\circ$ 時 q_2 之時域圖

4.2 模擬結果：1:2 內共振

由數值模擬分析的結果，我們得到了可能會產生 1:2 內共振的條件，是否非線性耦合在線性的共振結果於結構對應的模態和我們所提出的複雜程序形式的交互作用之間是需要被觀察且與所提出模型的非線性項的性質有很大的關聯，我們將觀察在相同條件下所進行的非線性模擬。

以 $\mu=1$ 、 $\beta=15^\circ$ 、 $\beta=30^\circ$ 為例，系統模擬時間長度設定為 15 秒， \ddot{y} 輸入訊號為正弦掃描(Chirp sine) 訊號，輸入時間為前 10 秒，掃頻範圍以 0.1 Hz 增加到 100 Hz，如圖 4 所示，其他參數代入數值計算的結果， q_1 、 q_2 的頻域圖分別如圖 5、6 所示。

觀察圖 5、圖 6， q_1 及 q_2 的自然頻率分別是 33 Hz 及 54 Hz，兩者約是 1.64 倍左右，而數值模擬計算的結果在 2 倍，兩者有些差距，如果再進一步觀察線性項所計算出來的數值， q_1 、 q_2 的自然頻率分別是 25 Hz 和 51 Hz， q_1 所計算出來的數值差距比較大，這是由於 q_1 方向上易受吊掛物重所造成的影響所致。此外，我們發現線性項所計算出來的數據會隨著 μ 值及 β 角的增加而造成相當大的誤差，其原因在於隨著 μ 值及 β 角的增加，吊掛物重所造成的非線性效應也就越明顯，造成自然頻率的偏移。因此，利用簡化過後的線性方程式去尋找 1:2 內共振發生的條件，只能使用在吊掛物重比較輕的情況，也就是較小的 μ 值及 β 角。

真實的起重機系統在 θ 角度時，約可以吊起 μ 值相當於5~20倍左右的物重，由單自由度非線性穩定振動系統中指出，其解在1階近似與2階近似並不相同，最大的不同點發生在共振區[7]，因此在這裡使用線性運動方程式去尋找會產生1:2內共振的條件是不可行。

在 θ 角等於 15° 時的相同的情況下，1:2內共振現象發生在 μ 值等於10的地方，我們在 \ddot{y} 施以正弦掃頻，其頻域圖如圖7所示。我們可以很明顯看出 q_2 的自然頻率是 q_1 的兩倍。

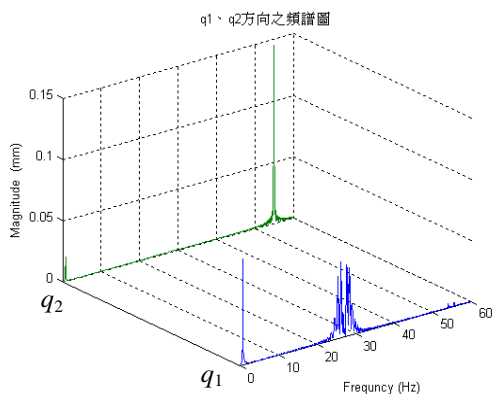


圖7 $\mu=10$ 、 $\theta=15^\circ$ 時 q_1 、 q_2 之頻域比較圖

圖8(a)、圖8(b)顯示於 $\ddot{y}=27.5$ Hz，模擬時間10到15秒之間 q_1 、 q_2 方向的時域圖，我們知道當某一系統產生內共振時，系統能量會在兩個模態之間傳遞，由於時域圖耦合了三組頻率，所以我們很難看出它們之間的相互關係，因此我們將它轉成頻域圖，再針對不同 μ 值對1:2內共振所造成的頻譜差異性作討論，結果如圖9、圖10所示：

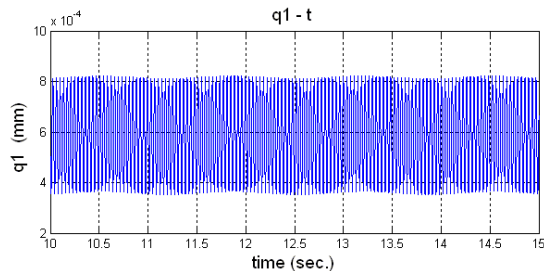


圖8(a) $\mu=10$ 、 $\theta=15^\circ$ 時 q_1 之時域圖

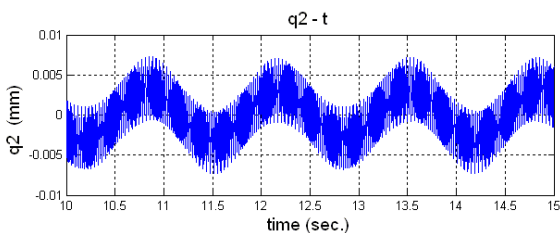


圖8(b) $\mu=10$ 、 $\theta=15^\circ$ 時 q_2 之時域圖

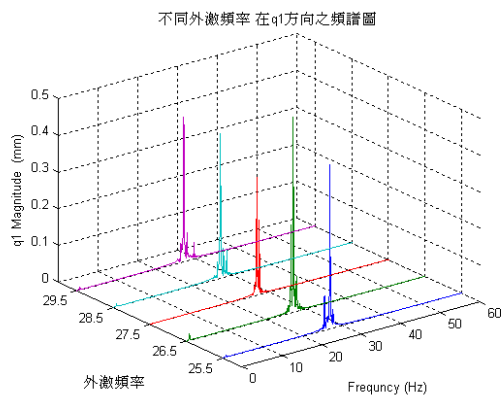


圖9 不同外激頻率、 $\theta=15^\circ$ 時 q_1 之頻域比較圖

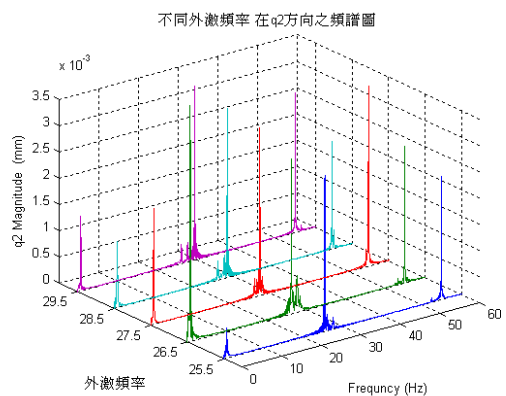


圖10 不同外激頻率、 $\theta=15^\circ$ 時 q_2 之頻域比較圖

在不同的外激頻率差異下來看， q_1 方向上的激振頻率在27.5 Hz時，其值最小， q_2 方向上由於產生1:2內共振， q_1 方向上的能量傳遞到 q_2 方向上， q_2 在此時的振幅也比其他頻率來得大，造成起重機在 q_2 方向上的不穩定。

由以上的模擬結果顯示，塔式起重機吊臂在某些條件下，會產生內共振，隨著吊臂不同的操作角度以及 μ 值，會產生內共振的頻率也都不同。另一方面， q_1 方向上的自然頻率會隨著 μ 值增加而下降，這將對於起重機在工作時，因為自然頻率的下降與內共振造成系統的不穩定，增加了塔式起重機可能翻覆的危險性。

5. 實驗研究

實際上的塔式起重機系統十分龐大，在實驗上不太能從實際的塔式起重機上著手，因此，我們採取製作一個有著類似結構特性的模型。製作模型之前，首先萃取塔式起重機系統的幾個重要特徵，例如，吊臂的勁度等，實驗設備之製作與架設詳細說明如下。

5.1 實驗設備及配置

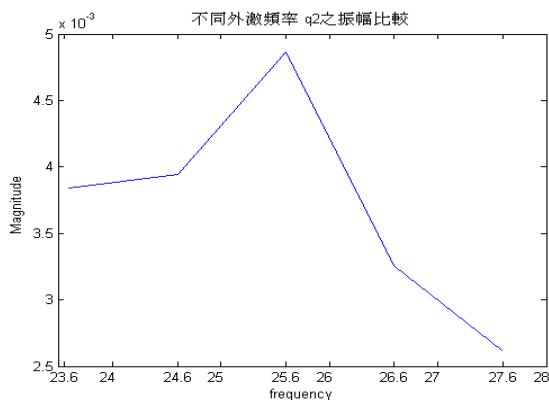


圖 16 不同外激頻率， q_2 之頻域最大值比較圖

6. 結論

本研究以數值模擬及實驗兩部分對施工用之塔式起重機穩定性，做深入之探討。在數值計算模擬方面，利用所推導的起重機系統運動方程式作為理論基礎，特別針對非線性系統之內共振，加以探討。過程中，先將起重機系統運動方程式予以適當的假設再線性化，藉由不同的吊臂仰角 θ 、吊掛物重比 μ 去尋找參數，接著再用非線性運動方程式，觀察系統自然頻率會之變化，結果顯示，非線性項確實會造成系統自然頻率的偏移，非線性項的影響越大，頻率偏移的範圍也就越多，1:2 內共振在模擬上確實會造成能量的傳遞，使得系統的穩定性降低。

實驗部分，以自行製作的塔式起重機模型做為驗證，結果雖然大致吻合模擬，但也因為實體模型屬於連續系統，會多出模擬時所觀察不到的現象，但利用適當假設而簡化過的運動方程式去尋找我們想要觀察現象的條件，是可以預期的。

7. 參考文獻

- [1] 黃繼民，塔式起重機在高樓層施工之穩定性研究，國立台北科技大學自動化所碩士論文。
- [2] 蔡克銓、翁元滔、謝紹松，331 地震中台北國際金融中心大樓塔式吊車震害調查及分析研究，結構工程季刊，第十七卷，第三期，p84-106，2002。
- [3] 李亦偉，超高層建築物施工起重機之耐震需求探討，國立台北科技大學土木與防災研究所。
- [4] 蕭鳳琳，高層建築物所裝置塔式起重機與設備之地震反應分析，國立台灣大學土木工程學研究所。
- [5] F. Ju a, Y.S. Choo a,* , F.S. Cui b, “ Dynamic response of tower crane induced by the pendulum motion of the payload,” International Journal of Solids and Structures, 43 , pp376–389,2006.
- [6] Fengxia Wang · Anil K. Bajaj, “ Nonlinear normal modes in multi-mode models of an inertially coupled elastic structure ,” Nonlinear Dyn , pp47:25–47,2007.
- [7] R.M. Evan-Iwanowski, Resonance Oscillations in Mechanical Systems, Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
- [8] Yukio Ishida, Tsuyoshi Inoue , “ Internal Resonance Phenomena of the Jeffcott Rotor With Nonlinear Spring Characteristics.”, Transactions of the ASME, pp476-484 /vol. 126,2004.
- [9] B. Jerman*, P. Podr+zaj, J. Kramar, “An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion development and verification of a mathematical model, ” International Journal of Mechanical Sciences ,46, pp 729–750,2004.
- [10] Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations, Addison -Wesley, 1987.
- [11] Kenneth G. McConnell, VIBRATION TESTING -Theory and Practice, Wiley; 1995.
- [12] 黎文龍，工程設計與分析：創思設計分析與模擬，東華書局，民國 89 年。

The Dynamic Stability of Tower Cranes Working on Construction

Wenlung Li, Ting-Yuan Chang

National Taipei University of Technology

Graduate Institute of Manufacturing
Technology

ABSTRACT

The main objective of the present study is to find the dynamic characteristics and potential risk of tower cranes which working on structure under various loadings and operation angles. The true tower cranes system is modeled as a discrete one at the first step. Then, equations of motion for the crane system are derived by using the Lagrange's method, and linear the equations of motion, then find the conditions of possible internal resonance. MATLAB_SIMULINK is chosen as the tool for simulating dynamic response of the system. We will discuss that the energy transfer of the system in 1:2 internal resonance. Generally, the frequency of earthquakes is under 20 Hz, so it may be at risk when the natural frequency tends to move to lower side. Experiments are carried out after the completion of simulation. The results of the experiment show that the conditions which are fended by complete equations of motion conform with the results of experiment, however simplifying equations of motion are only applied to small value of α and μ . Beside, the nature frequency will shaft because the effect of nonlinear terms.

Keywords: Tower cranes 、 Internal resonance 、 Stability of dynamic